

① Πρόβλημα

ακέραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (*)

② Βασικό πρόβλημα 1

λύσεων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ της (*) με $x_i \in \{0, 1\}$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$

Λύση:

Υπάρχει μια αντιστοιχία

Λύση της (*) με $x_i \in \{0, 1\}$ $\longleftrightarrow$ Κατανομή k όμοιων σφαιρών σε n $\longleftrightarrow$
($x_1, x_2, \dots, x_n$) διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1Συνδυασμός n ανά k (χωρίς επανάληψη) $\longleftrightarrow$ Μετάθεση 2 ειδών στοιχείων:
 k "1" και $n-k$ "0"π.χ. $n=5$ $k=3$ $(\underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{1}, \underset{x_3}{0}, \underset{x_4}{1}, \underset{x_5}{1}) \longleftrightarrow \bigcirc \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \{2, 4, 5\} \longleftrightarrow (0, 1, 0, 1, 1)$

③ Βασικό πρόβλημα 2

ακέραιων λύσεων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ της (*) με $x_i \geq 0$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$

Λύση:

Υπάρχει μια αντιστοιχία

Λύση της (*) με $x_i \geq 0$ $\longleftrightarrow$ Κατανομή k όμοιων σφαιρών σε n $\longleftrightarrow$
($x_1, x_2, \dots, x_n$) διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞ Συνδυασμός n ανά k με επανάληψηπ.χ. $n=5$ $k=3$ $(3, 0, 0, 0, 0) \longleftrightarrow \bigcirc \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bigcirc & & & & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \{1, 1, 1\}$ $(0, 1, 2, 0, 0) \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & \bigcirc\bigcirc & & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \{2, 3, 3\}$

ακέραιων λύσεων της $\textcircled{*}$ με $x_i \geq 0 = \left[\begin{smallmatrix} v \\ k \end{smallmatrix} \right]$

$$= \binom{v+k-1}{k} = \frac{(v+k-1)!}{k!(v-1)!}$$

$\textcircled{4}$ Εφαρμογή 1

ακέραιων λύσεων της $\textcircled{*}$ με $x_i \geq S_i$, $i=1,2,\dots,v$ (S_i δοσμένος ακέραιος)

π.χ.

ακέραιων λύσεων της $x_1+x_2+x_3+x_4=2025$ με $x_1, x_2 \geq 500 = S_1 = S_2$
 $x_3 \geq 1000 = S_3$
 $x_4 \geq 0 = S_4$

Ισοδύναμο πρόβλημα:

κατανομήν όμοιων σφαιριδίων σε v διακεκ. κελιά υπό τον περιορισμό ότι στο i κελί θα μπου το πολύ S_i σφαιρίδια για $i=1,2,\dots,v$ (για $S_i \geq 0, i=1,2,\dots,v$)

συνδυασμών v ανά k με επανάληψη του $\Omega = \{w_1, \dots, w_v\}$ που το στοιχείο w_i εμφανίζεται το πολύ S_i φορές

Απάντηση: $\left[k - \sum_{i=1}^v S_i \right]$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_v=k \\ x_i \geq S_i, i=1,2,\dots,v \end{array} \right\} \xrightarrow{y_i=x_i-S_i} \left\{ \begin{array}{l} y_1+S_1+y_2+S_2+\dots+y_v+S_v=k \\ y_i \geq 0, i=1,2,\dots,v \end{array} \right\} \longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1+y_2+\dots+y_v=k-\sum_{i=1}^v S_i \\ y_i \geq 0, i=1,2,\dots,v \end{array} \right\}$$

⑤ Εφαρμογή 2

ακεραίων λύσεων της $(*)$ με $x_i \leq m_i, i=1,2,\dots,v$ (m_i δοσμένος ακέραιος)

π.χ. # ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ με $x_1 \leq 7$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_4 \leq 4$$

Λύση: Προσοχή!

ΔΕΝ υπάρχει ισοδύναμο πρόβλημα με όρους κατανομής σφαριδίων σε κελιά ή επαναληπτικό σύνδυο. Το πρόβλημα γίνεται με αλγεβρική αναγωγή στο βασικό πρόβλημα 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_v=k \\ x_i \leq m_i, i=1,\dots,v \end{array} \right\} \xleftrightarrow{i=1,\dots,v} \left\{ \begin{array}{l} m_1-y_1+m_2-y_2+\dots+m_v-y_v=k \\ y_i \geq 0, i=1,\dots,v \end{array} \right\} \xleftrightarrow{y_i=m_i-x_i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1+y_2+\dots+y_v=\sum_{i=1}^v m_i-k \\ y_i \geq 0, i=1,\dots,v \end{array} \right\}$$

Άρα # ακ. λύσεων της $(*)$ με $x_i \leq m_i, i=1,\dots,v$ = $\left[\sum_{i=1}^v m_i - k \right]$

⑤ Εφαρμογή 3

ακεραίων λύσεων της $\textcircled{*}$ με $S_i \leq X_i \leq m_i, i=1, \dots, v$
(S_i, m_i δοσμένοι ακεραίοι)

π.χ. # ακ. λύσεων της $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8$ με $1 \leq X_1 \leq 70$
 $-3 \leq X_2 \leq 2$
 $2 \leq X_3 \leq 6$
 $-5 \leq X_4 \leq 4$

Λύση: Θέλει αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού (σε εκκρεμότητα)

Όταν $m_i, S_i > 0$ το συνδ. ισοδύναμο είναι:

κατανομών k όρων σε v $\Leftrightarrow$ επαν. συνδ. v ανά k του $\underline{0} = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v \}$ που το ω_i διακεκ. κελιά με τον περιορισμό = εμφανίζεται του S_i και το πολύ m_i φορές με $i=1, 2, \dots, v$
να μπουν του S_i και το πολύ m_i
σε. στο κελί με $i=1, \dots, v$

⑥ Εφαρμογή 4

Ακέραιες λύσεις γραμμικής ανίσωσης:

ακεραίων λύσεων της $X_1 + X_2 + \dots + X_v \leq k$ όπου $X_i \geq 0, i=1, \dots, v$

Λύση:

1^{ος} ζρ.: (η προσθ. αρχή)

ακ. λύσεων της $X_1 + \dots + X_v \leq k$ με $X_i \geq 0, i=1, \dots, v$ = $\sum_{j=0}^k$ # ακ. λύσεων της $X_1 + \dots + X_v = j$ με $X_i \geq 0, i=1, \dots, v$
 $= \sum_{j=0}^k \left[\begin{matrix} v \\ j \end{matrix} \right]$

2^{ος} ζρ.: (μετατροπή ανίσωσης σε εξίσωση)

$(X_1, X_2, \dots, X_v)$ ακεραία λύση $\left\langle \frac{v-1}{X_{v+1}=k - \sum_{i=1}^v X_i} \right\rangle_v (X_1, \dots, X_v, X_{v+1})$ ακεραία λύση της $X_1 + \dots + X_v + X_{v+1} = k$
της $X_1 + \dots + X_v \leq k$ με $X_i \geq 0$ με $X_i \geq 0$

π.χ. # ακ. λύσεων της $X_1 + X_2 + X_3 \leq 7 \Leftrightarrow$ # ακ. λύσεων της $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 7$ με $X_1, X_2, X_3 \geq 0 \rightarrow (3, 2, 1)$
 $(1, 0, 4)$ $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \rightarrow (3, 2, 1, 1)$
 $(1, 0, 4, 2)$

Άρα # ακεραίων λύσεων της $X_1 + \dots + X_v \leq k = \left[\begin{matrix} v+1 \\ k \end{matrix} \right]$

Πόρισμα

$$\sum_{j=0}^k \binom{v}{j} = \binom{v+1}{k} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^k \binom{v+j-1}{v+j} = \binom{v+k}{k}$$

→ Διαγώνια αναγωγική σχέση του τριγώνου
Pascal

→ Τριγώνω Pascal

$v \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

⑧ Εφαρμογή

ακ. λύσεων της $x_1 + \dots + x_v = k$ με $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, v = \binom{v}{k}$

= # ακ. λύσεων της $x_1 + \dots + x_v = k$ με $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, v-1$ και $x_v = 0 = \binom{v-1}{k}$
+

ακ. λύσεων της $x_1 + \dots + x_v = k$ με $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, v-1$ και $x_v = 1 = \binom{v-1}{k-1}$

Άρα $\binom{v}{k} = \binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1}$

⑨ Εφαρμογή

$$2^v = \# \text{ ακ. λύσεων της } x_1 + \dots + x_v \leq v \text{ με } x_i \in \{0, 1\} \quad (x_1, \dots, x_v) \quad \swarrow$$

$\delta_1 \delta_2 = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \dots \text{ ή } v$

$$= \sum_{k=0}^v \# \text{ ακ. λύσεων της } x_1 + \dots + x_v = k \text{ με } x_i \in \{0, 1\} = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} \rightarrow \text{οριζόντια άθροιση τριγ. Pascal}$$

10 Άσκηση (Θέμα 2 Ήλζ. 2005)

a) # ακ. λύσεων της $X_1 + \dots + X_v = k$ με $X_i \geq 2, i=1, \dots, v$ = $\begin{bmatrix} v \\ k-2v \end{bmatrix}$
(δίδεται $k \geq 2v$)

Λύση:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + \dots + X_v = k \\ X_i \geq 2, i=1, \dots, v \end{array} \right\} \xrightarrow[y_i = X_i - 2]{i=1, \dots, v} \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 + \dots + y_v = k - 2v \\ y_i \geq 0, i=1, \dots, v \end{array} \right\}$$

b) # ακ. λύσεων της $X_1 + \dots + X_v \leq k$ με $X_i \geq 3, i=1, \dots, v$ = $\sum_{j=3v}^k \begin{bmatrix} v \\ j-3v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v+1 \\ k-3v \end{bmatrix}$
(δίδεται $k \geq 3v$)