

① Συνέχεια άσκησης)

1/4/25

i) $\frac{10!}{2}$ (προσθετική αρχή , συμμετρία , νομική αρχή)

Ιδέα $\downarrow$ 7
7

Ιδέα $\downarrow$ 2
2

$\hookrightarrow$ Ιδέα $\downarrow$ 3
3

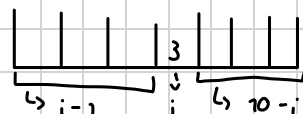
ii) Ιδέα 1: # μεταθ. με 3 = $\sum_{i=1}^8$ # μεταθ. με 3 πριν
πριν 5 πριν 7 5 πριν 7 και το 3

στην θέση 1

$$= \sum_{i=1}^8 \binom{7}{i-1} (i-1)! \frac{(7-i)!}{2}$$

στοιχεία που θα
μηναν πριν το 3

ζυθοθ. των στοιχείων



(όπως το i επ.

με 7-i θέσ. και
το 5 πριν το 7)

Ιδέα 2: # μεταθέσεων με 3 πριν 5 πριν 7
>> με 3 πριν 7 πριν 5
>> με 7 πριν 5 πριν 3

} 6 περιπτώσεις. $\Rightarrow$ Άρα ζητ. :

= $\frac{10!}{6}$

6

Ιδέα 3: 1^ο βήμα: Επιλογή θέσεων για τα 3, 5, 7 $\rightarrow \binom{10}{3}$ επιλογές

2^ο βήμα: Τοποθέτηση υπολ. σε σειρά $\rightarrow 7!$

$$\Rightarrow \text{Από νομική αρχή: } \binom{10}{3} \cdot 7! = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot 7! = \frac{10!}{6}$$

iii) Δημιουργώ μια τέτοια μετάθεση σε στάδια:

1^ο: Επιλογή θέσης για 3, 5, 7 $\rightarrow \binom{10}{3}$ επιλ.

2^ο: Από τις θέσεις του σταδίου 1

επιλέγω σε ποια θα μπει το 3 $\rightarrow 2$ επιλ.

(στην αριστερή ή μεσαία)

3^ο: Βάζω τα υπόλοιπα στοιχεία σε σειρά $\rightarrow 7!$

$$\Rightarrow \text{Από νομική αρχή: } \binom{10}{3} \cdot 2 \cdot 7! = \frac{10!}{3}$$

- iv) Δημιουργώ μια τέτοια μεταθ. σε στάδια
 1° : Τοποθ. περιπτώσεων στις πρώτες θέσεις $\rightarrow s!$ επιμ.
 2° : Τοποθ. άριτων στις εφευρ. θέσεις $\rightarrow s!$ επιμ.

$\Rightarrow$ Από νοητική αρχή: $(s!)^2$

② Συμμετρική ιδιότητα συνδυασμών

$$\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k} = \frac{v!}{k!(v-k)!}$$

③ Τύπος Cauchy

$$\binom{r+s}{v} = \sum_{k=0}^v \binom{r}{k} \binom{s}{v-k}$$

π.χ. $\binom{16}{5} = \binom{9}{0} \binom{7}{5} + \binom{9}{1} \binom{7}{4} + \binom{9}{2} \binom{7}{3} + \binom{9}{3} \binom{7}{2} + \binom{9}{4} \binom{7}{1} + \binom{9}{5} \binom{7}{0}$

$$\frac{16!}{5!11!} = \frac{9! \cdot 7!}{0!9!5!4!} + \dots + \frac{9! \cdot 7!}{5!4!0!7!}$$

Απόδειξη: Έστω $\underline{0} = \underbrace{\{w_1, w_2, \dots, w_r\}}_{\underline{0}_1} \cup \underbrace{\{w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_{r+s}\}}_{\underline{0}_2} = \underline{0}_1 \cup \underline{0}_2$ με $\underline{0}_1 \cap \underline{0}_2 = \emptyset$

$$\binom{r+s}{v} = \# \text{ συνδ. του } \underline{0} \text{ με } v \text{ στοιχεία} = \sum_{k=0}^v \# \text{ συνδ. του } \underline{0} \text{ με } v \text{ στοιχεία και ακριβώς } k \text{ στοιχεία από το } \underline{0}_1$$

Όμως ένας συνδυασμός του $\underline{0}$ με v στοιχεία και ακριβώς k στοιχεία από το $\underline{0}_1$ γίνε-
 ται σε στάδια:

$$1^{\circ}: \text{Επιλογή } k \text{ στοιχ. του } \underline{0}_1 \rightarrow \binom{r}{k} \text{ επιμ.}$$

$$2^{\circ}: \text{Επιλογή } v-k \text{ στοιχ. του } \underline{0}_2 \rightarrow \binom{s}{v-k} \text{ επιμ.}$$

$$\Rightarrow \text{Από νοητική αρχή: } \underline{\underline{\binom{r}{s} \binom{s}{v-k}}} = \sum_{k=0}^v \binom{r}{s} \binom{s}{v-k}$$

4) Τύπος Cauchy για επαναλ. συνδυασμούς

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r+s \\ v \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^v \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v-k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r+s-v+1 \\ v \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^v \binom{n}{k} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+v-k-1 \\ v-k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5) Άσκηση (Θέμα 2 2002 + επιλεγέν ερ.)

$$\underline{0} = \{1, 2, \dots, v\}$$

3 ιδιότητες για υποσύνολα του $\underline{0}$

α) περιέχουν ακριβώς k στοιχεία

β) περιέχουν τον αριθμό $r \in \underline{0}$

γ) περιέχουν ακριβώς $j-1$ στοιχεία μικρότερα του r
 $\hookrightarrow j-1 \leq k$

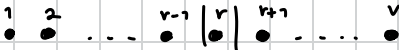
υποσυνόλων του $\underline{0}$ που ικανοποιούν την

- α)
- β)
- γ)
- α) & β)
- α) & γ)
- β) & γ)
- α) & β) & γ)

SOS

(για τις εξετάσεις αιτιολόγηση με λογική αρχή)

α) $\begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix}$  $\rightarrow k$ σ.

β) 2^{v-1} 

(γιατί υποσ. του $\underline{0}$ που περιέχ. το $r = \{r\} \cup \text{υποσ. του } \underline{0} \setminus \{r\}$)  $\rightarrow$ + οποιοδ. υποσύνολο του $\underline{0} \setminus \{r\}$

γ) $\begin{pmatrix} r-1 \\ j-1 \end{pmatrix} 2^{v-r+1}$  $\rightarrow$ ακριβώς $j-1$ σ. μικρότερα του r

α) & β) $\binom{v-1}{k-1}$ $\overset{\cdot r}{\circ} \rightarrow k-1$ στοιχ. εκτός του r

α) & γ) $\binom{r-1}{j-1} \binom{v-r+1}{k-j+1}$ γιατι $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & r-1 & | & r & r+1 & \dots & v \\ \hline & \hookrightarrow & j-1 & \text{στ.} & & & \hookrightarrow & k-(j-1) \text{ στ.} \\ & & & & & & & = k-j+1 \end{array}$

β) & γ) $\binom{r-1}{j-1} 2^{v-r}$ γιατι $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & r-1 & | & r & r+1 & \dots & v \\ \hline & \hookrightarrow & j-1 & & & 1 & & \hookrightarrow & \text{οσαδήποτε} \end{array}$

α) & β) & γ) $\binom{r-1}{j-1} \binom{v-r}{k-j}$ γιατι $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & r-1 & | & r & r+1 & \dots & v \\ \hline & \hookrightarrow & j-1 & & & 1 & & \hookrightarrow & k-j \end{array}$

6) Άσκηση (Ιαν. 2013 Θέμα 1)

$$A = \{a_1, \dots, a_{10}\}$$

$$B = \{b_1, \dots, b_{20}\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \emptyset$$

α) # Υποσ. του $\emptyset$ με 5 στοιχεία από A και οσαδήποτε από B

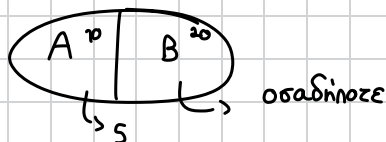
β) # Υποσ. του $\emptyset$ με 9 στοιχεία, 5 από τα οποία ανήκουν στο A

γ) # Υποσ. του $\emptyset$ με άρτιο αριθμό στοιχείων του A και 4 από το B

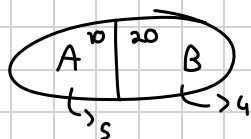
δ) # Υποσ. του $\emptyset$ με 9 το πολύ από το A και 4 ακριβώς από το B

ε) # Υποσ. του $\emptyset$ με 9 στοιχεία και οπωσδήποτε ένα στοιχείο και από το A και από το B

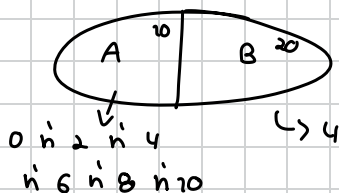
α) $\binom{10}{5} 2^{20}$



β) $\binom{10}{5} \binom{20}{4}$



γ) $\sum_{i=0}^5 \binom{10}{2i} \binom{20}{4}$



δ) $(2^{10} - 1) \binom{20}{4}$

ε) (εξαιρούνται τα υποσ. που έχουν μόνο στ. του A και τα υποσ. >> μόνο του B)

Υποσ. του $\emptyset$ με 9

στ. και οπωσδήποτε 1 από το A και 1 από B

$$= 10 \cdot 20 \cdot \binom{28}{7}$$

→ λάθος γιατί κάποια στ. μπορεί να τα μετρήσω πάνω από 1 φορά

$$= \binom{30}{9} - \binom{10}{9} - \binom{20}{9}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \binom{10}{k} \binom{20}{9-k}$$