

1. Ορισμοί

- $\underline{O} = \{w_1, \dots, w_n\}$
- **Διάρθρωση** $(A_1, \dots, A_k)$ του $\underline{O}$ είναι μια διατεταγμένη οικογ. υποσ. του $\underline{O}$ με
- i) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \underline{O}$
 - ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$
- **Διαμέριση** $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ του $\underline{O}$ είναι μια μη-διατεταγμ. οικογ. υποσ. του $\underline{O}$ με
- i), ii) όπως πριν και
 - iii) $A_i \neq \emptyset$ για $i = 1, 2, \dots, k$
- $\hookrightarrow$ δεν διατάσσω και δεν επιτρένω κενά

Π.Χ.

$$\underline{O} = \{w_1, w_2, \dots, w_{14}\}$$

$$\text{Διαιρέσεις: } (\emptyset, \{w_1, w_{14}\}, \{w_2, \dots, w_{13}\})$$

$$\neq$$

$$(\{w_1, w_{14}\}, \emptyset, \{w_2, \dots, w_{13}\})$$

$$\neq$$

$$(\emptyset, \emptyset, \{w_1, w_{14}\}, \{w_2, \dots, w_{13}\})$$

$$\text{Διαμερίσεις: } \{ \{w_1, w_{14}\}, \{w_2, \dots, w_{13}\}, \{w_{13}\} \}$$

$$1)$$

$$\{ \{w_{13}\}, \{w_1, w_{14}\}, \{w_2, \dots, w_{12}\} \}$$

② Παράδειγμα:

διαιρέσεων του $\underline{0} = \{w_1, \dots, w_{29}\}$ τήνου $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$ με

$$\# A_1 = \# A_2 = \# A_3 = 3$$

$$\# A_4 = \# A_5 = \# A_6 = \# A_7 = 5$$

(4×5 και $3 \times 3 = 29$ στοιχεία)

Λύση:

Κάθε διαιρέση αυτού του τήνου γίνεται σε στάδια:

$$1^{\circ}: \text{Επιλογή στοιχείων του } A_1 \text{ από το } \underline{0} : \binom{29}{3} \text{ επιμ.}$$

$$2^{\circ}: \text{Επιλογή} \gg A_2 : \binom{26}{3} \text{ επιμ.}$$

$$3^{\circ}: \text{Επιλογή} \gg A_3 : \binom{23}{3} \text{ επιμ.}$$

$$\vdots$$

$$7^{\circ}: \text{Επιλογή} \gg A_7 : \binom{5}{5} \text{ επιμ.}$$

$\hookrightarrow \underline{0} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_6)$

$$\Rightarrow \text{Άρα το } \# \text{ διαιρέσεων τήνου } 3-3-3-5-5-5-5 = \binom{29}{3} \binom{26}{3} \binom{23}{3} \binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}$$

$$= \frac{29!}{3!26!} \cdot \frac{26!}{3!23!} \cdot \frac{23!}{3!20!} \cdot \frac{20!}{5!15!} \cdot \frac{15!}{5!10!} \cdot \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!}{5!0!}$$

$$= \frac{29!}{3!3!3!5!5!5!5!}$$

③ Γενίκευση # διαιρέσεων

διαιρέσεων του $\underline{0} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ του τήνου $(A_1, A_2, \dots, A_r)$

με $\# A_i = k_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$

$\hookrightarrow$ (πόσα στοιχεία θα έχει το κάθε σύνολο)

$$(v = k_1 + k_2 + \dots + k_r)$$

$$= \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!}{k_1! k_2! \dots k_r!} = \boxed{\frac{v!}{k_1! k_2! \dots k_r!}}$$

(αντιστοιχία με μεταθέσεις ίδιου τήνου)

Απόδειξη:

Στάδια:

$$1^{\circ}: \text{Επιλογή στοιχ. } A_1 = \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_r}{k_1}$$

$$2^{\circ}: \gg A_2 = \binom{k_2 + k_3 + \dots + k_r}{k_2}$$

$$3^{\circ}: \gg A_3 = \binom{k_3 + k_4 + \dots + k_r}{k_3}$$

$$\vdots$$

$$r^{\circ}: \gg A_r = \binom{k_r}{k_r}$$

$$\Rightarrow \text{Από νομική αρχή } \# \text{ διαιρέσεων} = \binom{k_1 + \dots + k_r}{k_1} \binom{k_2 + \dots + k_r}{k_2} \dots \binom{k_r}{k_r}$$

$$= \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

④ Συνέχεια παραδείγματος:

διαμερίσεων του $\underline{0} = \{w_1, \dots, w_{29}\}$ με 3 3-σύνολα και 4 5-σύνολα

Λύση:

Για να φτιάξω διαίρεση τύπου 3-3-3-5-5-5-5 μπορώ να σκεφτώ σε στάδια:

1^ο: Δημιουργώ διαμέριση του σε 3 3-σύνολα και 4 5-σύνολα : # διαμ. $\underline{0}$ σε

2^ο: Βάζω τα 3-σύνολα σε σειρά : $3!$ 3 σ. και 4 σ.

3^ο: Βάζω τα 5-σύνολα σε σειρά : $4!$

=> Άρα το # διαίρεσεων = # διαμερίσεων σε $3! \cdot 4!$
 τύπου 3-3-3-5-5-5-5 3 σ. και 4 σ.

$$\Rightarrow \text{Άρα } \# \text{ διαμερίσεων} = \frac{29!}{3!4!(3!)^3(5!)^4}$$

⑤ Γενίκευση # Διαμερίσεων

Διαμερίσεων του $\underline{0} = \{w_1, \dots, w_n\}$ σε r σύνολα εκ των οποίων r_1 1-σύνολα, r_2 2-σύνολα, ..., r_v v -σύνολα

$$(1 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 + 3 \cdot r_3 + \dots + v \cdot r_v = v,$$

$$r_1 + r_2 + \dots + r_v = r)$$

$$= \frac{v!}{r_1! r_2! \dots r_v! (1!)^{r_1} (2!)^{r_2} \dots (v!)^{r_v}}$$

Για να φτιάξω διαίρεση τύπου $\underbrace{1-1-\dots-1}_{r_1} \underbrace{2-2-\dots-2}_{r_2} \dots \underbrace{-v}_{r_v}$ σκέφτομαι σε στάδια:

1^ο: Δημιουργώ διαμέριση του $\underline{0}$: # διαμ. $\underline{0}$ σε r_1 1-σ., r_2 2-σ., ...

2^ο: Βάζω τα 1-σύνολα σε σειρά : $r_1!$ επιλ.

3^ο: Βάζω τα 2-σύνολα σε σειρά : $r_2!$ επιλ.

⋮

Από προηλκν' αρχή # διαίρεσεων τύπου $1-1-\dots-1-2-\dots-2-\dots-v$ = # Διαμερ. με $r_1! r_2! \dots r_v!$
 r_1 1-σ., r_2 2-σ.

$$\text{Άρα } \# \text{ Διαμερ. με } r_1 \text{ 1-σ., } r_2 \text{ 2-σ., } \dots = \frac{\# \text{ διαίρ.}}{r_1! r_2! \dots r_v!} = \frac{v!}{(1!)^{r_1} (2!)^{r_2} \dots (v!)^{r_v}}$$

6 Άσκηση (εξετάσεων):

10 ορειβάτες

1) Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν σε 3 ομάδες ώστε

3 άτομα $\rightarrow$ Όμιλος

4 άτομα $\rightarrow$ Βαρδούσια

3 άτομα $\rightarrow$ Παρνασσός

(διαίρεση)

2) Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν για μια εκπαίδευση σε 2 ομάδες των 3 ατόμων και 1 ομάδα των 4 ατόμων

(διαμέριση)

$$1) \# \text{ Διαίρεσεων τύπου } = \frac{10!}{3!4!3!}$$

$$2) \# \text{ Διαμερίσεων με } 2 \text{ } 3\text{-}\sigma. = \frac{10!}{2!1!(3!)^2(4!)^1}$$

7 Αντιστοιχία διαίρεσεων και μεταθέσεων 2 ειδών στοιχείων

Παραδ.:

$$O = \{w_1, w_2, \dots, w_{10}\}$$

$$\begin{array}{c} \text{Διαίρεσεις τύπου } 1-2-3-2-2 \\ \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \{w_3\}, & \{w_1, w_{10}\}, & \{w_2, w_4, w_5\}, & \{w_6, w_7\}, & \{w_8, w_9\} \end{array} \end{array} \longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 & w_{10} \\ (2, & \underline{3}, & 1, & \underline{3}, & \underline{3}, & 4, & 4, & 5, & 5, & 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \{w_{10}\}, \{w_9, w_8\}, \{w_1, w_2, w_7\}, \{w_3, w_4\}, \{w_5, w_6\} \\ \begin{array}{ccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 & w_{10} \\ (3, & 3, & 4, & 4, & 5, & 5, & 3, & 2, & 2, & 1) \end{array} \end{array} \longleftrightarrow$$

Μεταθέσεις 5 στοιχείων που εμφανίζονται 1-2-3-4-5 φορές

8) Άσκηση (εξετάσεων)

μεταθέσεων των $1, 2, \dots, 10$ με

i) το 3 να εμφ. πριν το 5

ii) το 3 πριν το 5 και το 5 πριν το 7

iii) τα 3, 5 πριν το 7

iv) στις πρώτες 5 θέσεις οι περιττοί

$$\begin{aligned}
 \text{i) } 1^{\text{ος}} \text{ ζρ. : } \# \text{ μεταθ. των } 10 &= \sum_{i=1}^9 \# \text{ μεταθ. των } 10 \text{ σ.} \\
 (\text{προσθ. αρχή}) \quad \text{σ. που το 3 εμφ.} &= \sum_{i=1}^9 \text{ που το 3 εμφ. πριν το 5} \\
 &\quad \text{και το 3 εμφ. στην } i \text{ θέση} \\
 &= \sum_{i=1}^9 1 \cdot (10-i) \cdot 8! \rightarrow \text{επιλ. θέσεων} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \text{επιλ. θέσης} \quad \text{θέσης για} \\
 &\quad \text{για το 3} \quad \text{το 5} \\
 &\quad \text{επιλ. θέσεων} \quad \text{θέσης για} \\
 &\quad \text{για το 3} \quad \text{το 5}
 \end{aligned}$$

$$= 8! (9 + 8 + 7 + \dots + 1)$$

$$= 8! \cdot \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= \frac{10!}{2}$$

$$\begin{aligned}
 2^{\text{ος}} \text{ ζρ. : } \text{Μεταθέσεις που το 3} &\quad \left(\frac{1-1}{\text{επι}} \right) > \text{Μεταθέσεις που το 5} \\
 (\text{συμμετρία}) \quad \text{είναι πριν το 5} &\quad \text{είναι πριν το 3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \# \text{ μετ. με 3 πριν το 5} = \# \text{ μετ. με 5 πριν το 3}$$

$$\hookrightarrow \text{Άρα είναι οι μισές όλων των μεταθ.} = \frac{10!}{2}$$

3^{ος} ζρ. : Κάθε μεταθ. γίνεται σε στάδια:

1^ο : Επιλ. θέσεων για τα 3, 5 : $\binom{10}{2}$ επιλ.

2^ο : Τοποθ. των σ. στις υπ. θέσεις : $8!$

$$\Rightarrow \text{Από νομ/κη αρχή} = \binom{10}{2} 8! = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 8! = \frac{10!}{2}$$