

Ασκήσεις σε συνδυασμούς και διατάξεις - Εφαρμογές σε προβλ. κλασικής πιθανότητας

20/3/25

① Παιγίσι κλασικής πιθανότητας

Πείραμα τύχης στην κλασική πιθανότητα:

Επιλογή ενός στοιχείου από

- πεπερασ. σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
- ισοπίθανα στοιχεία
- ενδεχόμενο είναι κάθε $A \subseteq \Omega$
- το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται αν το αποτέλεσμα $\in A$.
- πιθανότητα ενδεχομένου:

$$P(A) = \frac{\# \text{ στοιχείων του } A}{\# \text{ στοιχείων του } \Omega} = \frac{\text{Ευνοϊκές αποτελ.}}{\text{Δυνατά αποτελ.}}$$

② Παράδειγμα:

Πείραμα τύχης:

Ρίψη 3 (διακεκ.) ζαριών:

Αποτέλεσμα = (αποτελ. ζαριού 1, αποτελ. ζαριού 2, αποτελ. ζαριού 3)

$$\Omega = \{ (1,1,1), (1,1,2), \dots, (6,6,6) \} \text{ πεπερ.}$$

$\nwarrow \quad \uparrow \quad \nearrow$
ισοπίθανα

A_1 : Ενδεχόμενο "όλες οι ζαριές ίσες"

$$= \{ (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \dots, (6,6,6) \}$$

$$\rightarrow P(A_1) = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατά Επαν. Διατάξεις}} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

A_2 : Ενδεχόμενο "άθροισμα ζαριών άρτιο"

$$= \{ (1,1,2), (1,1,4), (1,1,6), \dots, (1,2,1), \dots, (6,6,6) \}$$

$$\rightarrow P(A_2) = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατά}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{χρηάζονται} \\ \text{συνδυαστική} \end{array}$$

3 Το πρόβλημα των γενεθλίων:

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο n ατόμων με γενέθλια ισοπίθανα τις 365 μέρες του χρόνου. Για ποιο n και πάνω συμφέρει να στοιχηματίσω ότι υπάρχουν 2 άτομα με ίδια ημέρα γενεθλίων;

Πείραμα τύχης:

Καταγραφή γενεθλίων n ατόμων

A: τουλάχιστον 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \text{πιθ. Δεν υπάρχουν άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων.}$

$$= 1 - \frac{\text{αποσει. με όλα τα } n \text{ άτομα με διαφ. μέρα γεν.}}{\text{δυνατά αποτελέσματα}} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 365 & 365 & \dots & 1 & 365 \\ \hline 1 & 2 & & & n \\ \hline \end{array}$$

$$= 1 - \frac{(365)_n}{365^n} \rightarrow \text{μη επαν. διατ.}$$

$$365^n \rightarrow \text{επαν. διατ. } \approx 365 - n + 1$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - (n-1))}{365^n}$$

Για ποιο n ισχύει $P_n > \frac{1}{2}$;

n	P_n
2	$\frac{1}{365}$
3	$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365 \cdot 365 \cdot 365}$
20	0.411
23	0.507
50	0.970

$$P_2 = 1 - \frac{365 \cdot 364}{365 \cdot 365} = \frac{1}{365}$$

4) Άσκηση:

v ανδρόγυνα: $(A_1, \Gamma_1), \dots, (A_v, \Gamma_v)$

Επιλέγω k άτομα ($k \leq v$)

Πιθανότητα να υπάρχουν:

- 1) Ακριβώς r γυναίκες
- 2) Ακριβώς r γυναίκες και όχι άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο
- 3) Να μην υπάρχουν άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο

Αποτέλεσμα = υποσύνολο με k στοιχεία του $\{A_1, \Gamma_1, A_2, \Gamma_2, \dots, A_v, \Gamma_v\}$

$$\# \text{ δυνατών αποτ.} = \binom{2v}{k}$$

1) ευνοϊκό αποτ. = υποσύνολο του $\{A_1, \Gamma_1, A_2, \Gamma_2, \dots, A_v, \Gamma_v\}$ με k άτομα εκ των οποίων ακριβώς r γυναίκες

Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε στάδια:

- 1^ο: Επιλογή r γυναίκες $\rightarrow \binom{v}{r}$ επιλογές
- 2^ο: Επιλογή $k-r$ άνδρες $\rightarrow \binom{v-r}{k-r}$ επιλογές

$$\Rightarrow \text{Από πομπική αρχή: } \# \text{ ευνοϊκών αποτ.} = \binom{v}{r} \binom{v-r}{k-r}$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{\binom{v}{r} \binom{v-r}{k-r}}{\binom{2v}{k}}$$

2) ευνοϊκό αποτ. = υποσύνολο $\gg \gg$ και όχι άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο

σε στάδια:

- 1^ο: Επιλέγω r γυναίκες $\rightarrow \binom{v}{r}$ επιλογές
- 2^ο: Επιλέγω $k-r$ άνδρες $\rightarrow \binom{v-r}{k-r}$ επιλογές

$$\Rightarrow \text{Από πομπική αρχή: } \# \text{ ευνοϊκών} = \binom{v}{r} \binom{v-r}{k-r}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{\binom{v}{r} \binom{v-r}{k-r}}{\binom{2v}{k}}$$

3) # ευνοϊκών = # επιλογών k ατόμων από τα $2v$ χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο

προσθ. αρχή $\rightarrow = \sum_{r=0}^k$ # επιλογών k ατόμων από τα $2v$ χωρίς άτομα από ίδιο ανδρ. και με ακριβώς r γυναίκες

1^{ος} τρόπος

$$2) = \sum_{r=0}^k \binom{v}{r} \binom{v-r}{k-r} = \sum_{r=0}^k \frac{v!}{(v-r)!r!} \cdot \frac{(v-r)!}{(k-r)!(v-k)!}$$

$$= \frac{v!}{(v-k)!} \sum_{r=0}^k \frac{1}{(k-r)!r!} = \frac{v!}{(v-k)!k!} \sum_{r=0}^k \frac{k!}{(k-r)!r!}$$

$$= \binom{v}{k} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \rightarrow \text{υποσύνολα με } r \text{ στοιχεία}$$

$$= \binom{v}{k} 2^k$$

$$\Rightarrow P_3 = \frac{\binom{v}{k} \cdot 2^k}{\binom{2v}{k}}$$

ευνοϊκών

2ε στάδια :

1^{ος}: Επιλογή k ανδρόγυνων $\rightarrow \binom{v}{k}$ επιλογές

2^{ος}: Επιλογή A ή Γ από 1^η ανδρ $\rightarrow 2$ επιλογές

3^{ος}: $\gg$ από 2^η $\rightarrow 2$ επιλογές

2^{ος} τρόπος

$\vdots$
($k+1$)^{ος}: $\gg$ από ($k+1$)^η $\rightarrow 2$ επιλογές

$$\Rightarrow \text{Από πολλαπλή αρχή: } \# \text{ ευνοϊκών} = \binom{v}{k} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{k} = \binom{v}{k} \cdot 2^k$$

3^{ος} χρόνος

{ Λάθος: δημιουργεί διατεταγμ. }
κ-άδα

Διατεταγμ.

$$\Rightarrow \# \text{ enjoints} = 2^k \cdot \frac{v!}{(v-k)!k!} = 2^k \binom{v}{k}$$

Δεν με
ενδιαφέρει η διαίτησιν
(στην αν υποσύννομο)
πρέπει να διατρέσω με κ'!

Στατ. ΕΠΙ.
κ!