

① Βασικές ιδιότητες του $\binom{v}{k}$

$\binom{v}{k} = \# \text{ συνδ. } v \text{ ανά } k = \# \text{ υποσυνόλων ενός } \underline{\Omega} = \{w_1, \dots, w_v\} \text{ με } k \text{ στοιχεία}$

$$\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!(v-k)!}, \quad 0 \leq k \leq v$$

$$\binom{v}{0} = \binom{v}{v} = 1$$

$$\binom{v}{k} = 0 \quad k > v$$

Συμμετρική ιδιότητα : $\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k}$

Η συνάρτηση f : $\begin{matrix} \text{Σύνολο υποσυνόλων} \\ \text{του } \underline{\Omega} \end{matrix} \xrightarrow[\text{ενι}]{1-1} \begin{matrix} \text{Σύνολο υποσυνόλων} \\ \text{του } \underline{\Omega} \end{matrix}$
 $A \mapsto f(A) = A^c = \underline{\Omega} \setminus A$ είναι 1-1 και ενι

$\# \text{ υποσυνόλων του } \underline{\Omega} \text{ με } k \text{ στοιχεία} = \# \text{ συμπληρωμάτων των υποσυνόλων του } \underline{\Omega} \text{ με } k \text{ στοιχεία}$

$$\binom{v}{k}$$

$\# \text{ υποσυνόλων του } \underline{\Omega} \text{ με } v-k \text{ στοιχεία}$

$$\binom{v}{v-k}$$

② Τρίγωνο Pascal

$$\boxed{\binom{v+1}{k} = \binom{v}{k} + \binom{v}{k-1}}, \quad k \geq 1$$

Απόδειξη:

$$\binom{v+1}{k} = \# \text{ υποσυνόλων του } \underline{0} = \{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\} \text{ που περιέχουν } k \text{ στοιχεία}$$

αρχή αθρ.

$$= \# \text{ υποσυνόλων του } \underline{0} + \# \text{ υποσυνόλων του } \underline{0} \text{ με } k \text{ στοιχεία με } k \text{ στοιχεία που ΔΕΝ περιέχουν το } w_{n+1} \text{ που περιέχουν το } w_{n+1}$$

$$= \binom{v}{k} + \binom{v}{k-1} \rightarrow \text{επιλέγω } k-1 \text{ στοιχεία από τα } w_1, \dots, w_n \text{ και μετά συμπληρ. το } w_{n+1}$$

$\binom{v}{k} = 0$ if $k > n$

$v \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

→ μόνο 0 εαυτός του

③ Ιδιότητες:

1) Το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής v είναι 2^v :

$$\sum_{k=0}^v \binom{v}{k} = 2^v$$

όλων των υποσυν.

του $\underline{0} = \{w_1, \dots, w_n\}$ με k στοιχεία

2) Η γραμμή v δίνει τον συντελεστή του $(a+b)^v$

$$(a+b)^0 = 1 \cdot a^0 b^0$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a^1 b^0 + 1 \cdot a^0 b^1$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + 1 \cdot a^0 b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3$$

3) Η γραμμή v δίνει τα ψηφία του 11^v :

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = 121$$

$$11^3 = 1331$$

$$11^4 = 14641$$

$$11^5 = 161051$$

$$11^6 = 1771561$$



$$\text{Έχω } 11^v = (10+1)^v$$

$$= \binom{v}{0} 10^v + \binom{v}{1} 10^{v-1} + \binom{v}{2} 10^{v-2} + \dots + \binom{v}{v-1} 10^1 + \binom{v}{v} 10^0$$

4) Κατακόρυφη αναδρομική σχέση

$$\sum_{v=0}^j \binom{j}{v} = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \dots + \binom{v}{0} = \binom{v+1}{0}$$

απαρά το στοιχείο
κάτω δεξιά από
την αήνη που
επιλέγω

$$\text{Απόδειξη: } \binom{v+1}{k} = \binom{v}{k} + \binom{v}{k+1}$$

ένα πάνω και
αριστερά

$$= \binom{v}{k} + \binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k+1}$$

$$= \binom{v}{k} + \binom{v-1}{k} + \binom{v-2}{k} + \binom{v-2}{k+1}$$

$$= \binom{v}{k} + \binom{v-1}{k} + \dots + \binom{0}{k} + \binom{0}{k+1}$$

5) Διαγώνια αναδρομική σχέση

στοιχείο ακριβώς
κάτω από την
διαγώνιο

αήνη
αριστερά

$$\sum_{j=0}^k \binom{v+j}{j} = \binom{v}{0} + \binom{v+1}{1} + \binom{v+2}{2} + \dots + \binom{v+k}{k} = \binom{v+k+1}{k}$$

$$\text{Απόδειξη: } \binom{v+k+1}{k} = \binom{v+k}{k} + \binom{v+k}{k-1}$$

$$= \binom{v+k}{k} + \binom{v+k-1}{k-1} + \binom{v+k-1}{k-2}$$

$$= \binom{v+k}{k} + \binom{v+k-1}{k-1} + \binom{v+k-2}{k-2} + \binom{v+k-3}{k-3}$$

$$= \binom{v+k}{k} + \dots + \binom{v}{0}$$

6) Τα αθροίσματα των δευτερεύουσων διαγωνίων δίνουν τους όρους Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_v = a_{v-1} + a_{v-2}, \quad v \geq 2$$

$$\sum_{j=0}^k \binom{k-j}{j} = f_k$$