

① Παράδειγμα:

3 ●, 2 ○ να μουν σε σειρά

τρήνων = ?

$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \rightarrow (123)45$

● ● ○ ● ○

3! · 2! μεταθέσεις

● ● ○ ○ ●

των $\{1,2,3,4,5\}$ από κάθε

● ○ ● ● ○

μετάθεση με 3 ● και 2 ○

○ ● ● ○ ●

Άρα: $\left(\# \text{μεταθέσεων} \right)_{3\bullet + 2\circ} \cdot 3! \cdot 2! = 5!$

○ ● ● ● ○

○ ● ● ○ ●

○ ● ○ ● ●

○ ○ ● ● ●

$\Rightarrow \# \text{μεταθέσεων} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Ιδέα: Έσω ότι τα σφαιρίδια έχουν στην πίσω μεριά αριθμούς
① ② ③ ④ ⑤

② Πλήθος μεταθέσεων σ ειδών στοιχείων

μεταθέσεων του $\underline{0} = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ που το w_i εμφανίζεται k_i φορές = $\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$

w_1
 w_2
 $\vdots$
 w_s

k_1 φορές
 k_2 φορές
 k_s φορές

Ονομάζω τα k_i αντιγρ. του w_i ως $w_1, w_2, \dots, w_{k_i}$

Έσω $\underline{0}' = \{w_1, \dots, w_{k_1} \rightarrow k_1$

$w_{k_1+1}, \dots, w_{k_1+k_2} \rightarrow k_2$

$\vdots$

$w_{k_1+k_2+\dots+k_{s-1}+1}, \dots, w_{k_1+k_2+\dots+k_s} \rightarrow k_s$

“ $s!$ στο παράδειγμα

Οι μεταθέσεις του $\underline{0}'$ είναι $(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!$

Όμως κάθε μετάθεση του $\underline{0}'$ φτιάχνεται σε 2 στάδια:

1^ο: Επιμέρω μετάθεση του $\underline{0}$ $\rightarrow$ # μετάθεση s ειδών στοιχείων....

2^ο: Επιμέρω σειρά για κάθε είδος στοιχ. $\rightarrow k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!$

$\Rightarrow$

Άρα από λογική αρχή: $\# \text{μεταθ. του } \underline{0}' = \# \text{μεταθ. του } \underline{0} \times k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!$

$(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!$ (s είδη στοιχείων)

που το w_1 εμφ. k_1 φορές
 w_2 k_2

$\Rightarrow \# \text{μετ. του } \underline{0} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$

2^{ος} ζήτος: Μια μετάθεση S ειδών στοιχείων που το w_1 εμφαν. k_1 φορές
 w_2 k_2
 $\vdots$



$k_1 + k_2 + \dots + k_s$ θέσεις

Κάθε τέτοια μετάθεση γίνεται σε S στάδια:

1^{ος}: Επιλογή θέσεων για το 1^ο είδος: $\binom{k_1 + k_2 + \dots + k_s}{k_1} \rightarrow$ με ενδιαφέρει μόνο πόσες θέσεις θα γεμίσω

2^{ος}: $\ggg$ 2^{ος}: $\binom{k_2 + k_3 + \dots + k_s}{k_2}$

$\vdots$

$\vdots$ $\binom{k_s}{k_s}$

S $\vdots$ $\binom{k_s}{k_s}$

$\Rightarrow$ Από πομπή αρχή: $\binom{k_1 + k_2 + \dots + k_s}{k_1} \binom{k_2 + k_3 + \dots + k_s}{k_2} \dots \binom{k_s}{k_s}$

$$= \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1! (k_2 + \dots + k_s)!} \cdot \frac{(k_2 + k_3 + \dots + k_s)!}{k_2! (k_3 + \dots + k_s)!} \cdot \frac{(k_3 + k_4 + \dots + k_s)!}{k_3! (k_4 + \dots + k_s)!} \dots \frac{k_s!}{k_s! 0!}$$

$$= \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$$

③ Παράδειγμα:

αναδιατάξεις της λέξης ΑΛΛΕΠΑΛΛΗΛΟΣ

$$2A = \frac{12!}{5! 2! 2! 1! 1!}$$

$$2E = \frac{12!}{5! \cdot 4}$$

1Δ

1Ζ

1Η

$$ΑΛΛΑ = \frac{4!}{2! 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$$

④ Κατανομές σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά

k σφαιρίδια

v κελιά ΔΙΑΚΕΚΡ.

κατανομών των k σφαιρ. στα v κελιά = ?

Σφαιρίδια: διακεκρ. / όμοια

Κελιά: χωρητικότητας 1 / χωρητικότητας ∞

4 περιπτώσεις:

χωρ. 1

χωρ. 2

διακ.

$(v)_k$

v^k

→ διατάξεις

όμοια

$\binom{v}{k}$

$\begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix}$

→ συνδυασμοί

χωρίς επανάληψη

↪ με επανάληψη

1^η περ. : v διακεκρ. κελιά χωρ. 1
 k διακεκρ. σφαιρίδια

$v=5, k=3$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} \text{κελ.σ.} & \text{κελ.σ.} & \text{κελ.σ.} \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 5, 1, 2 \end{pmatrix}^3$

Κάθε τέτοια κατανομή αντιστοιχεί σε 1 διάταξη v ανά k χωρίς επανάληψη (λόγω χωρητικ. 1)

$\begin{bmatrix} & 1 & 4 & 2 & \end{bmatrix}$

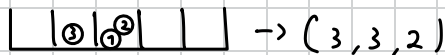
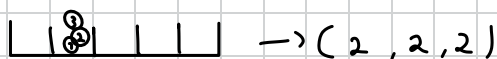
$(2, 4, 3)$

$\begin{bmatrix} 3 & & 2 & 1 & \end{bmatrix}$

$(4, 3, 1)$

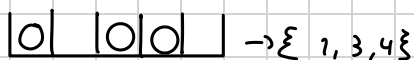
⇒ Άρα το # κατανομών v διακ. σφ. σε v κελιά χωρ. 1 = # διατ. v ανά $k = (v)_k$

$2^{\text{η}}$ περ.: k διακ. σφαίρ.
 v διακ. κελιά χωρ. ∞



Άρα $\#$ καταν. k διακ. σφ. σε v διακ. = $\#$ διαζ. v ανά k = v^k
 κελιά χωρ. ∞ με επανάγ.

$3^{\text{η}}$ περ.: v διακ. κελιά χωρ. 1
 k όμοια σφαίριδια



Κάθε ζέτοια κατανομή αντιστοιχεί σε
 έναν συνδυασμό v ανά k χωρίς επανάγ.



$\Rightarrow$ Άρα $\#$ καταν. k όμοιων σφ. = $\#$ συνδυασμών = $\binom{v}{k}$
 σε v κελιά χωρ. 1 v ανά k

$4^{\text{η}}$ περ.: v διακ. κελιά χωρ. ∞
 k όμοια σφαίρ.



Κάθε ζέτοια κατανομή αντιστοιχεί
 σε έναν συνδυασμό v ανά k με
 επανάληψη



$\Rightarrow$ Άρα $\#$ κατ. όμοιων σφ. = $\#$ συνδυασμών = $\left[\begin{matrix} v \\ k \end{matrix} \right]$
 σε v κελιά χωρ. ∞ v ανά k με επαν.

5) Πλήθος εναλλαγών συνδυασμών

Παραδ.:

$$\begin{aligned} \# \text{εναλλαγ.} &= \# \text{κατανομήν} \\ \text{συνδ. 6 ανά 4} & \quad 4 \text{ ομοίων σφαιρ. σε} \\ & \quad 6 \text{ διακ. κελιά άπειρης χωρ.} \end{aligned}$$

κατανομή 4 ομοίων σφαιρ. σε 6 διακ. κελιά $\equiv$ Ακολουθία από "1, 0" με 7 "1" και 4 "0" που αρχίζει και

$$* |0| |0|0| *$$

ξεκινεί με "1"
 $\equiv$ Ακολουθία από "1" και "0"
με 5 "1" και "4"

$$\text{n.χ. } \{2, 3, 3, 5\}$$

$$\hookrightarrow |0|00|0|$$

$$\Rightarrow \text{Άρα } \# \text{εναλ. συνδ.} = \# \text{μεταθ. 2 στοιχείων} = \frac{(5+4)!}{5!4!}$$

$6 \text{ ανά } 4 \qquad \omega_1 \rightarrow 5 \quad \omega_2 \rightarrow 4$
 $v-1$ k

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Κατανομή } k \text{ ομοίων σφ. σε } v \text{ διακ. κελιά χωρ. } \infty &\equiv \text{Ακολουθία με } v-1 \text{ "1" και } k \text{ "0"} \\ &= \frac{(v-1+k)!}{(v-1)!k!} = \binom{v-1+k}{k} \end{aligned}$$