

Διατάξεις - Συνδυασμοί① Ορισμός: $\underline{0} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ Διάταξη στοιχείων του $\underline{0} \equiv$ Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά κ στοιχείων του $\underline{0}$
v ανά κ

$$= (a_1, a_2, \dots, a_\kappa), a_i \in \underline{0}$$

$$\begin{matrix} a_i \neq a_j \\ i \neq j \end{matrix}$$

Διάταξη
(χωρίς επαναγ.) (αληή)

Επαναγωγική Διάταξη

Συνδυασμός στοιχείων του $\underline{0} \equiv$ Επιλογή κ στοιχείων του $\underline{0}$
v ανά κ

$$= \{a_1, \dots, a_\kappa\}, a_i \in \underline{0}$$

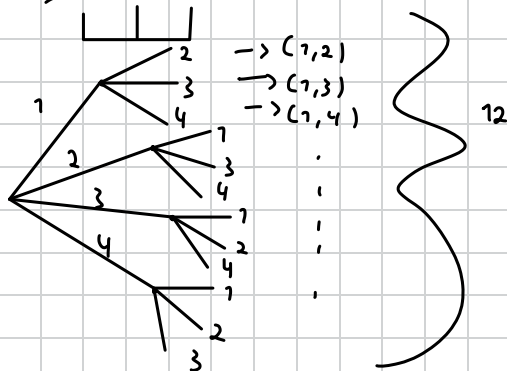
$$\begin{matrix} a_i \neq a_j \\ i \neq j \end{matrix}$$

Συνδυασμός
(αληής)

Επαναγωγικός Συνδυασμός

② Παράδειγμα: Διατάξεις

$$\underline{0} = \{1, 2, 3, 4\} \quad v=4$$

Διατάξεις $v=4$ ανά $\kappa=2$ ③ Πηχθος Διατάξεων

$$\begin{aligned}
 \text{Πρόταση: } \# \text{ Διατάξεων } v \text{ ανά } \kappa &= P(v) \\
 &= v(v-1)(v-2)(v-3)\dots(v-\kappa+1) \\
 &= \frac{v!}{(v-\kappa)!}
 \end{aligned}$$

↗ permutation
κ παράγοντες

Απόδειξη: Κάθε διάταξη $(a_1, \dots, a_k)$ v ανά k γίνεται σε k στάδια

- $1 \equiv$: Επιλογή του $a_1 \rightarrow v$ επιλογές
 $2 \equiv$: $\gg a_2 \rightarrow v-1$ επιλογές
 $3 \equiv$: $\gg a_3 \rightarrow v-2$ επιλογές
 $\vdots$
 $k \equiv$: $\gg a_k \rightarrow v-(k-1)$ επιλογές
 $v-k+1$

* πόσες επιλογές έχω
είναι ανεξάρτητο από το
προηγούμενο στάδιο

Από πολλαπλ. αρχή $P(v, k) = v(v-1) \dots (v-k+1)$

④ Πλήθος διατάξεων με επανάληψη

Πρόταση: # διατάξεων v ανά k με επανάληψη $= v^k$

Απόδειξη: Όμοια με τις αρχές διατάξεις με v επιλογές σε κάθε στάδιο

⑤ Μεταθέσεις

Διάταξη v ανά $v \equiv$ Μετάθεση v στοιχείων

$$\# \text{ μεταθέσεων } v \text{ στοιχείων} = v! = \frac{v!}{(v-v)!} = \frac{v!}{0!} = \frac{v!}{1}$$

⑥ Παράδειγμα: Συνδυασμοί

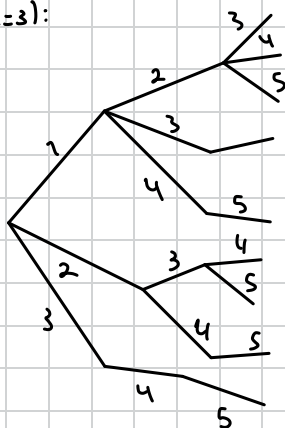
$$\underline{0} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad v=5$$

Συνδυασμοί 5 ανά 3 ($k=3$):

$$\{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2, 4\}$$

$$\{1, 2, 5\}$$



$$\{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2, 4\}$$

$$\{1, 2, 5\}$$

$$\{1, 3, 4\}$$

$$\{1, 3, 5\}$$

$$\{1, 4, 5\}$$

$$\{2, 3, 4\}$$

$$\{2, 3, 5\}$$

$$\{2, 4, 5\}$$

$$\{3, 4, 5\}$$



Εναλλακτικοί Συνδυασμοί 5 ανά 3

$$\begin{aligned} &= \text{Συνδυασμοί } 5 \text{ ανά } 3 + \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 1, 4\}, \{1, 1, 5\} \\ &\quad = 10 + \{ \{2, 2, 1\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 2, 4\}, \{2, 2, 5\} \\ &\quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \{5, 5, 1\}, \{5, 5, 2\}, \{5, 5, 3\}, \{5, 5, 4\} \} = 20 \\ &\quad + \{ \{1, 1, 1\}, \{2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}, \{4, 4, 4\}, \{5, 5, 5\} \} = 5 \\ &= \textcircled{35} \end{aligned}$$

7. Σύνδεση Διατάξεων - συνδυασμών

Κάθε διάταξη n ανά k γίνεται σε 2 στάδια

- 1^ο: Επιλογή k στοιχείων που θα μπου στην διάταξη $\rightarrow \#$ συνδυασμών n ανά k επιλογές
- 2^ο: Τοποθέτηση των k επιλεγμένων στοιχείων σε σειρά $\rightarrow k!$ επιλογές

$$\Rightarrow \text{Άρα } \# \text{ Διατάξεων } n \text{ ανά } k = (\# \text{ συνδυασμών } n \text{ ανά } k) \cdot k!$$

$$\text{Άρα: } \frac{n!}{(n-k)!} = \# \text{ συνδ. } n \text{ ανά } k \cdot k!$$

$$\Leftrightarrow \# \text{ συνδ. } n \text{ ανά } k = \frac{\# \text{ Διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}$$

Πρόταση:

$$\# \text{ συνδυασμών } n \text{ ανά } k = \binom{n}{k} \rightarrow \text{Combinations}$$

$$= \binom{n}{k}$$

$$= \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\rightarrow \#$ υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου με n στοιχεία

~~$\rightarrow (1,2,3), (1,3,2), (3,1,2), (3,2,1), (2,1,3), (2,3,1)$~~
 $\rightarrow (1,2,4), (1,4,2) \dots$

$$\# \text{ } \underbrace{5 \text{ avà } 3 \cdot 3}_{6} = \# \text{ } \underbrace{\text{Διατάξ. } 5 \text{ avà } 3}_{= 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60}$$

$$\Rightarrow \# \text{ ZwS. 5 avà 3} = \frac{60}{6} = 10$$

Η ιδέα ΔΕΝ δουλεύει για συνδυασμούς με επανάληψη

Από συνδ. με διαφορ. στοιχεία $\rightarrow$ 6 διατάξεις

Από συνδ. με 2 άτομα στοιχεία $\rightarrow$ 3 διατάξεις (π.χ. $\{1, 2\} \rightarrow (1, 2), (2, 1)$)

Από συνδ. με 3 όμοια $\rightarrow$ 1 διάταξη

⑧ Πιθανο Εναλλακτικές Συνδυασμών

Πρόταση: # συν. v ανά k με ένατοι = $\begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix} = \binom{v+k-1}{k} = \frac{(v+k-1)!}{k!(v-1)!}$
 $\downarrow$ όχι νατοι

$$\begin{aligned} n.x. \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 5+3-1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35 \end{aligned}$$

9) Δίνονται

#v ανά κ	Χωρίς Εναντίληψη	Με Εναντίληψη
Διατάξεις	$(v)_κ = \frac{v!}{(v-κ)!}$	$v^κ$
Συνδυασμοί	$\binom{v}{κ} = \frac{v!}{κ!(v-κ)!}$	$\left[\begin{matrix} v \\ κ \end{matrix} \right] = \binom{v+κ-1}{κ}$

10) Άσκηση

Σωματείο 100 ατόμων

Δ.β. με 5 άτομα = ?

i) Χωρίς όχημα

ii) Με πρόεδρο και 4 μέλη

iii) Με πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και 2 μέλη

i) $\binom{100}{5}$

ii) Κάθε Δ.β. με 1 πρ. και 4 μέλη γίνεται σε στάδια:

1^ο: Επιλογή ατόμων του Δ.β. $\rightarrow \binom{100}{5}$ επιλογές

2^ο: Επιλογή 4 μελών από επιμεθεύστες $\rightarrow \binom{5}{4}$ επιλογές

a' way

$$\begin{aligned} \text{Από πολλ. αρχή} &= \binom{100}{5} \cdot \binom{5}{4} \\ &= \frac{100!}{5! \cdot 95!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{100!}{95! \cdot 4!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{4!} \end{aligned}$$

1^ο: Επιλογή προέδρου $\rightarrow 100$ επιλογές

2^ο: Επιλογή μελών $\rightarrow \binom{99}{4}$ επιλογές

b' way

$$\text{Από πολλ. αρχή} = 100 \cdot \frac{99!}{4! \cdot 95!} = 100 \cdot \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{4!}$$

iii) Κάθε τέτοιο Δ.β. γίνεται σε στάδια:

- 1^ο: Επιλογή προέδρου $\rightarrow 100$ επιλογές
- 2^ο: Επιλογή αντιπρ. $\rightarrow 99$ επιλογές
- 3^ο: Επιλογή γραμμ. $\rightarrow 98$ επιλογές
- 4^ο: Επιλογή μελών $\rightarrow \binom{97}{2}$

α' way

$$\begin{aligned}\text{Άρα από νομ. αρχή} &= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \frac{97!}{95!2!} \\ &= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{2}\end{aligned}$$

$$= \binom{100}{5} 5 \cdot 4 \cdot 3$$

β' way

11) Συνέχεια Άσκησης

Διμερείς 100 ατόμων (50 ζευγάρια (Α, Γ))

Δ.β. με 5 άτομα = ?

- i) Με 3 Γ και 2 Α
- ii) Με Γ πρόεδρο και Α αντιπρόεδρο
- iii) Χωρίς άτομα αν' το ίδιο ζευγάρι με 3 Γ και 2 Α

$$\text{i) } \binom{50}{3} \binom{50}{2} \rightsquigarrow \begin{matrix} \searrow \text{από } \Gamma \\ \searrow \text{από } A \end{matrix}$$

$$\text{ii) } 50 \cdot 50 \cdot \binom{98}{3} \rightsquigarrow \begin{matrix} \searrow \text{από υπολ.} \\ \searrow \text{επιγ. } \Gamma \\ \searrow \text{επιγ. } A \end{matrix} \quad \underline{\underline{\alpha' \text{ way}}}$$

$$\text{iii) } \binom{50}{3} \cdot \binom{47}{2} \rightsquigarrow \text{πρώτα τους συντρόφους των 3 } \Gamma \searrow \text{από } \Gamma$$