

① Αρχές:

- Πολλαπλασιαστική
 - Προσθετική
 - Εγκλεισμόν-Αποκλεισμόν
 - Περιστρωπύνα (ή Dirichlet) $\} \text{Υπαρξη Αντικειμένου}$
- Υπολογισμός
λήθους αντικειμ.

② Πολλαπλασιαστική Αρχή:

Αν ένα συνδυαστικό αντικείμενο γίνεται σε v στάδια και υπάρχουν

k_1 επιλογές για το 1^ο στάδιο

k_2 >> 2^ο

$\vdots$ >>

k_v >> v ^ο

Τότε υπάρχουν συνολικά $k_1 k_2 \dots k_v$ διαφορετικά συνδυαστικά αντικείμενα.

Προσοχή:

1) Η πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει εφόσον διαφορετικές επιλογές ακόμα και σε ένα στάδιο δίνουν διαφορετικά αντικείμενα.

2) Η πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει εφόσον οι επιλογές στα προηγούμενα στάδια δεν επηρεάζουν το πλήθος των επιλογών στο τρέχον στάδιο.

③ Παράδειγμα: # 4-ψήφιων περιττών = ?

Ένας τετραψήφιος περιττός γίνεται σε 4 στάδια:

1^ο: Ψήφιο χιλιάδων $\rightarrow$ 9 επιλογές

2^ο: Ψήφιο εκατοντάδων $\rightarrow$ 10 επιλογές

3^ο: Ψήφιο δεκάδων $\rightarrow$ 10 επιλογές

4^ο: Ψήφιο μονάδων $\rightarrow$ 5 επιλογές

$\Rightarrow$ Από πομ/κή αρχή έχουμε $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ 4-ψήφιους περιττούς

④ Παράδειγμα: # 4-ψήφιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία = ?

↓
Ξεκινά με τον πιο δύσκολο περιορισμό
(γιατί εξαρτ. από προηγ. επιλογές)

- 1^ο: Μονάδες → 5 επιλογές
- 2^ο: Χιλιάδες → 8 επιλογές
- 3^ο: Εκατοντάδες → 8 επιλογές (μηνάει και το 0)
- 4^ο: Δεκάδες → 7 επιλογές

⇒ Από πομπική αρχή έχουμε $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7$ αριθμούς

⑤ Προσθετική Αρχή:

Αν ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων χωρίζεται σε ζένα ανά 2 υποσύνολα τότε το πλήθος των συνδυαστικών αντικειμένων του συνόλου είναι το

Σ # συνδυαστικών αντικειμένων των υποσυνόλων:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\Rightarrow \# \text{στοιχείων του } A = \sum_{i=1}^n \# \text{στοιχείων του } A_i$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ για } i \neq j$$

⑥ Παράδειγμα (συνέχεια του ④):

= Σ # 4-ψήφιων περιπτώσεων με διαφορετικά ψηφία που το 0 βρίσκεται στη θέση των εκατοντάδων

+ Σ # >> δεκάδων

+ Σ # >> δεν εμφανίζεται

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 1 & 8 & 5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 1 & 5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 8 & 5 \\ \hline \end{array}$$

7 Παράδειγμα: # λέξεων (= διατετ. ν-άδα γραμμάτων ελ. αλφ.) με το πολύ 6 γράμματα = ?
 (A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η)

$$\begin{aligned} \# \text{ συν. λέξεων} &= \sum_{i=1}^6 \# \text{ λέξεων με ακριβώς } i \text{ γράμματα} \\ &= \sum_{i=1}^6 24^i \end{aligned}$$

24	24	24	24	24
----	----	----	----	----

δεν υπάρχει
0 όρος

$$= 24^1 + 24^2 + 24^3 + 24^4 + 24^5 + 24^6 = \frac{24^7 - 1}{24} - 1$$

Παρένθεση: Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου

Γεωμετρική πρόοδος = ακολουθία αριθμών με σταθερό λόγο

π.χ. $2^3, 6^3, 18^3, 54^3, 162$

$a, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$

Άθροισμα ν όρων γεωμετρικής προόδου

$$a + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + \dots + a_1^n$$

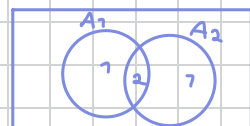
$$= a \frac{(1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1})}{x}$$

$$\begin{aligned} 1x &= 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n \\ -x &= -1 - 1^2 - 1^3 - \dots - 1^{n-1} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1x &= 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n \\ -x &= -1 - 1^2 - 1^3 - \dots - 1^{n-1} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (1-1)x &= 1^n - 1 \\ x &= \frac{1^n - 1}{1 - 1} \end{aligned}$$

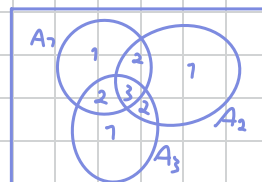
8) Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού:

Συμβολισμός: $A \rightarrow N(A) = \#(A)$: Πλήθος των στοιχείων του A

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$$



$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - (N(A_1 A_2) + N(A_2 A_3) + N(A_1 A_3)) + N(A_1 A_2 A_3)$$



9) Παράδειγμα: # 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία που είχε το 1^ο είχε το 4^ο ψηφίο είναι περιττοί = ?

A_1 = σύνολο 4-ψήφιων με 1^ο ψηφίο περιττό

A_2 = >>> 4^ο ψηφίο περιττό

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2) \rightarrow \text{Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 9 & 8 & 7 \\ \hline 1^{\circ} & 2^{\circ} & 3^{\circ} & 4^{\circ} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 8 & 7 & 5 \\ \hline 2^{\circ} & 3^{\circ} & 4^{\circ} & 1^{\circ} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 8 & 7 & 4 \\ \hline 1^{\circ} & 3^{\circ} & 4^{\circ} & 2^{\circ} \\ \hline \end{array}$$

$$= 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 - 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$$

$$= 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (9 + 8 - 4)$$

$$= 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 13$$

10 Αρχή Περιορισμένων (Dirichlet):

Αν μοιράσουμε $nk+1$ αντικείμενα σε k κελιά τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 κελί με τουλάχιστον $n+1$ αντικείμενα

11 Άσκηση: # γνήθους τοποθετίσεων 17 κοριτσιών και 6 αγορίων σε σειρά.

- 1) χωρίς περιορισμό
- 2) όλα τα κορίτσια στο τέλος
- 3) όλα τα αγόρια συνεχόμενα
- 4) ένα αγόρι υποχρεωτικά στην 3^η θέση και ένα κορίτσι στην 5^η
- 5) όχι διαδοχικά αγόρια

Λύση:

1) $23!$ (έχω 23 θέσεις να γεμίσω)

2) $6! \cdot 17!$ (οι 6 πρώτες είναι δεσμευμένες για αγόρια)

3) Γίνεται σε 3 στάδια: 1^ο: Αγόρια σε σειρά $\rightarrow 6!$ επιλογές
2^ο: Κορίτσια σε σειρά $\rightarrow 17!$ επιλογές
3^ο: Τοποθέτηση μηλοκ αγορίων ανάμεσα στις θέσεις
(ανάμεσα, πριν ή μετά τα κορίτσια) $\rightarrow 18$ επιλογές
 $\hookrightarrow 16$ κενά $\hookrightarrow 1$ $\hookrightarrow 1$

$$\Rightarrow 6! \cdot 18 \cdot 17! = 6! \cdot 18!$$

4) Γίνεται σε 3 στάδια: 1^ο: Επιλογή αγοριού $\rightarrow 6$ επιλογές
2^ο: Επιλογή κοριτσιού $\rightarrow 17$ επιλογές
3^ο: Τοποθέτηση υπόλοιπων $\rightarrow 21!$ επιλογές

$$\Rightarrow 6 \cdot 17 \cdot 21!$$

5) Γίνεται σε 7 στάδια: 1^ο: Τοποθέτηση κοριτσιών στην σειρά $\rightarrow 17!$ επιλογές
2^ο: Τοποθέτηση αγοριού 1 ανάμεσα στα κορίτσια $\rightarrow 18$ επιλογές
3^ο: $\gg 2 \rightarrow 17$ επιλογές
4^ο: $\gg 3 \rightarrow 16$ επιλογές
5^ο: $\gg 4 \rightarrow 15$ επιλογές
6^ο: $\gg 5 \rightarrow 14$ επιλογές
7^ο: $\gg 6 \rightarrow 13$ επιλογές