

- Αντικείμενα:

18/2/25

① Καταμέτρηση σχηματισμών

Με πόσους τρόπους μπορώ να...

ή

Πόσα αντικείμενα υπάρχουν με την ιδιότητα...

② Βασικές εφαρμογές

- πιθανότητες
- αλγόριθμοι - πολυπλοκότητα (θεωρ. πληρ.)

③ 2 τρόποι σκέψης

1. Αναδρομικός / Επαγωγικός
2. Αντιστοιχίες

Πρόβλημα 1: v ευθείες στο επίπεδο

v ευθείες σε γενική θέση (ανά 2 όχι $\parallel$, ανά 3 όχι συνερχόμενες)
παράμετρος

$v=0$

$v=1$

$v=2$

$v=3$

$v=4$

$a_v = \#$ σημείων που ορίζουν οι v ευθείες

$a_0=0$ $a_1=0$ $a_2=1$ $a_3=3$ $a_4=6$

$b_v = \#$ ευθ. τμ. που ορίζονται πάνω στις v ευθείες

$b_0=b_1=b_2=0$ $b_3=3$ $b_4=8$

$\gamma_v = \#$ χωρίων που ορίζουν οι v ευθείες

$\gamma_0=1$ $\gamma_1=2$ $\gamma_2=4$ $\gamma_3=7$ $\gamma_4=11$

- Υπολογισμός a_n - Αναδρομική προσέγγιση:

Έστω ότι έχω λύσει το πρόβλημα με τις $n-1$ ευθείες.

→ $a_{n-1} = \#$ σημείων που προσθέτει η n -οστή ευθεία
 $= n-1$ (όσα τα σημεία κομής της με τις προηγούμενες)

$$\Rightarrow \text{Άρα } a_n = a_{n-1} + (n-1), \quad n \geq 1 \text{ και } a_0 = 0$$

κλειστός κύκλος: $a_n = n-1 + a_{n-1}$

$$= (n-1) + (n-2) + a_{n-2}$$

$$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + a_{n-3}$$

$$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + (n-n) + a_0$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{Αριθμ. πρόσδος}$$

- Υπολογισμός a_n - αντιστοιχίες:

Σημείο = M_n - διατεταγμένο ζεύγος ευθειών
 $\uparrow$ $n-1$ αντιστοιχία

Άρα $a_n = \#$ μν διατ. ζ. ευθειών

Ένα ζεύγος ευθειών γίνεται σε 2 στάδια:

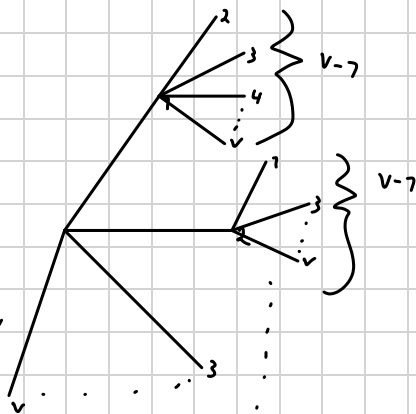
1^ο: Επιλ. 1^{ης} ευθείας → n τρόποι

2^ο: Επιλ. 2^{ης} ευθείας → $n-1$ τρόποι

→ $\Rightarrow$ Άρα έχουμε $n(n-1)$ ζεύγη ευθειών

Άρα μν-διατ. ζεύγη = $\frac{n(n-1)}{2}$

↳ (2 τρόποι π.χ. 12 ή 21)



- Υπολογισμός b_n - Αναδ. προσέγγιση:

Έστω ότι με $n-1$ ευθείες έχουμε b_{n-1} ευθ. τμή. σ' αυτές. Πόσα προσθέτει η n -οστή ευθεία;



ευθ. τμή. που προστέθηκαν

= # ... στην καινούργια ευθεία + # ... στις παλιές ευθείες

$$= n-2 + n-1$$

→ γιατί έχω $n-1$ ευθείες παλιές και προσζηθεται 1 σε κάθε ευθεία

$$\Rightarrow \text{Άρα } b_n = 2n-3 + b_{n-1} \quad n \geq 3 \quad b_2 = 0$$

η n -οστή
έχει $n-1$ σημεία

1^{ος} + τελευταίος

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

⋮

$$2n-3 = 2(n-2) + 1$$

$$b_n = (2n-3) + b_{n-1}$$

$$= (2n-3) + (2n-5) + b_{n-2}$$

$$= (2n-3) + (2n-5) + (2n-7) + b_{n-3}$$

$$= (2n-3) + (2n-5) + (2n-7) + \dots + 3 + b_2$$

$$= \frac{2n(n-2)}{2}$$

$$= n(n-2)$$

- Υπολογισμός b_n - Αντιστοιχίες:

Ευθ. τμήμα = (ευθεία στην οποία ανήκει, ευθεία που ορίζει το νότιο άκρο του)



n



$n-2$

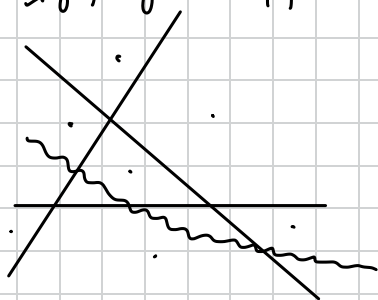
εξαρτάται η ευθεία που ανήκει και το νότιο άκρο

⇒ Άρα το ευθ. τμή. γίνεται σε 2 στάδια:

1^η: Επιλογή ευθείας στην οποία ανήκει → n

2^η: Επιλογή ευθείας που ορίζει το νότιο άκρο της → $n-2$

- Υπολογισμός γ_n - αναδρομικά:



$$\begin{aligned} v-1 &= 3 \\ \gamma_{v-1} &= 7 \end{aligned}$$

Έστω ότι οι $v-1$ ευθείες χώρισαν το επίπεδο σε γ_{v-1} χωρία. Πόσα χωρία προσθέτει η v -οστή ευθεία;

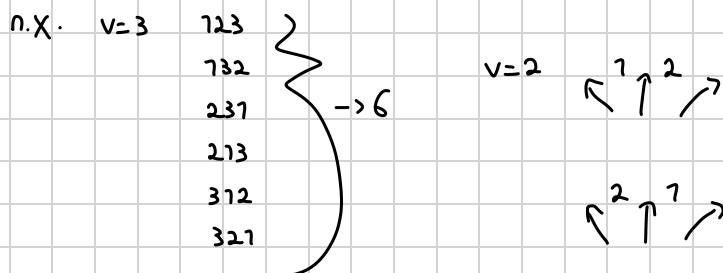
Όσα τα "κομμάτια" που κόβεται από τις προηγούμενες (ευθ. ζμ. ή ημιευθείες) $= v$

$$\Rightarrow \text{Άρα } \boxed{\gamma_v = \gamma_{v-1} + v}, \quad v \geq 2, \quad \gamma_1 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \gamma_v &= v + \gamma_{v-1} \\ &= v + v-1 + \gamma_{v-2} \\ &= v + v-1 + v-2 + \dots + 2 + \gamma_1 \\ &= v + v-1 + v-2 + \dots + 1 \\ &= \frac{v(v+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{v^2 + v + 2}{2} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2: Πλήθος μεταθέσεων n -στοιχείων

$p_n = \#$ τοποθετήσεων n αντικειμένων (διακεκριμένων) σε σειρά;



- 1^{ος} τρόπος (Αναδρομικά):

Από κάθε μεταθέση των στοιχείων $1, 2, \dots, v-1$ παίρνω v μεταθέσεις των στοιχείων $1, 2, \dots, v$ γιατί το στοιχείο v μπορεί να μπει σε v θέσεις (πρώτο, τελευταίο ή ενδιάμεσο)

$$\Rightarrow \text{Άρα } \left. \begin{aligned} p_v &= v \cdot p_{v-1}, \quad v \geq 2 \\ p_1 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_v &= v(v-1) \dots 1 \\ &= v! \end{aligned}$$

-2^{ος} τρόπος (βασικά):

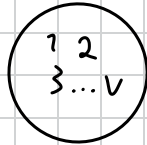
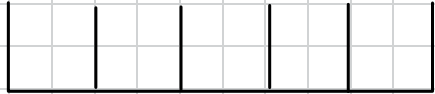
Κάθε μεταθέση γίνεται σε v στάδια:

1^{ος}: Επιμ. αριθμού για τη θέση 1 $\rightarrow v$

2^{ος}: Επιμ. αριθμού για τη θέση 2 $\rightarrow v-1$

$\vdots$

$v \rightarrow 1$



$\Rightarrow$ Άρα το πλήθος των μεταθέσεων είναι $= v(v-1) \dots 1 = v!$

Πρόβλημα 3: Πλήθος υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, v\}$

-1^{ος} τρ. (Αναδρ.): π.χ. $v=2$

$\emptyset \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{1, 2\}$

$\downarrow$
 $v=3$

$\emptyset \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{1, 2\}$

$\{3\} \quad \{1, 3\} \quad \{2, 3\} \quad \{1, 2, 3\}$

$$a_v = 2 \cdot a_{v-1}, \quad v \geq 1$$

$$a_1 = 1$$

$$\Rightarrow a_v = 2^v$$

-2^{ος} τρ.: Υποσύνολο $\equiv$ διάνυσμα με 0,1 με v -στοιχεία που δείχνει ποια από τα $1, 2, \dots, v$ ανήκουν στο υποσύνολο

$$\emptyset \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{1\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{2\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{3\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{1, 2\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{1, 3\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{2, 3\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$