19/12/23

Ασκήσεις

① Πλήθος συναρτήσεων μεταξύ πεπερασμένων συνόλων

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_\nu\}$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_\nu$

\# συναρτ. $f: X \to Y$ με

i) χωρίς περιορ.

ii) 1-1

iii) γνησίως αύξουσες

iv) αύξουσες

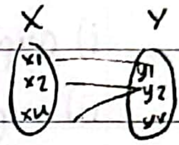
v) γνησίως φθίν

vi) φθίνουσες

vii) 1-1 και επί

viii) αύξουσες και επί

ix) επί;



Λύση

i) Κάθε συνάρτηση περιγράφεται από τη διατεταγμένη k-άδα

$$\big(\underset{\substack{\uparrow \\ Y}}{f(x_1)}, \underset{\substack{\uparrow \\ Y}}{f(x_2)}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ Y}}{f(x_k)}\big)$$

Από πολλαπλ. αρχή έχω ν^k συναρτήσεις (\# διατ. ν ανά k με επαναλ)

ii) Ομοίως με το (i), αλλά $\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1) = (\nu)_k$

(\# διατ. ν ανά k χωρίς επαναλ)

iii) Κάθε αύξουσα συνάρτηση περιγράφεται από ένα υποσύνολο του Y με k στοιχεία διότι τότε το $f(x_1)$ θα είναι το μικρότερο στοιχείο του A, το $f(x_2)$ το αμέσως επόμενο κλπ

Άρα $\underset{\text{γν.αυξ.}}{\# f: \overset{k}{X} \to \overset{\nu}{Y}} = \underset{\substack{\text{ν ανά k} \\ \text{χωρίς επαναλ}}}{\#\ \text{συνδ.}} = \binom{\nu}{k}$

iv) Ομοίως με το (iii) αλλά το A είναι συνδυασμός με επανάληψη

Άρα $\# \underset{\text{αύξουσα}}{F : \overset{k}{X} \to \overset{v}{Y}} = \underset{\substack{v \text{ ανά } k \\ \text{με επαναλ}}}{\# \text{ συνδ}} = \left[\begin{matrix} v \\ k \end{matrix} \right] = \binom{v+k-1}{k}$

v) όπως (iii)

vi) όπως (iv)

vii) Αν $v \neq k$ τότε $\# F$ 1-1 και επί $= 0$

Αν $v = k$ τότε $\# F$ 1-1 και επί $= v!$

viii) $\# \underset{\substack{\text{αύξουσες} \\ \text{και επί}}}{F : \overset{k}{X} \to \overset{v}{Y}} = \#$ συνδ v ανά k του $Y = \{y_1, \dots, y_v\}$ με επανάληψη που κάθε y_i εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά

$= \#$ ακερ. λύσεων της $z_1 + z_2 + \dots + z_v = k$ ($z_i = \#$ εμφ του y_i) με $z_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots v$

$\overset{w_i = z_i - 1}{=} \#$ ακερ. λυσ της $w_1 + w_2 + \dots + w_v = k - v = \left[\begin{matrix} v \\ k-v \end{matrix} \right] = \binom{v+k-v-1}{k-v}$ με $w_i \geq 0$

ix) Μια $F : X \to Y$ που είναι επί προσδιορίζεται από ένα διαν. $(\underset{Y}{\overset{\uparrow}{F(x_1)}}, \dots, \underset{Y}{\overset{\uparrow}{F(x_k)}})$ όπου κάθε y_i εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά

Άρα $\#\underset{\varepsilon\pi\iota}{F}: \overset{u}{X} \to \overset{v}{Y}$ = # διατάξεων v ανα k του $Y=\{y_1,\dots,y_v\}$ όπου κάθε y_i εμφ. τουλ. 1 φορά.

1η λύση (με γεννήτριες)

$$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=1}^{\infty} \frac{(tx_j)^{r_j}}{j!}, \quad j=1,2,\dots,v$$

$$E_j(t) = E_j(t,1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t - 1, \quad j=1,2,\dots,v$$

$$E(t) = E_1(t)\dots E_v(t) = (e^t-1)^v = (-1)^v(1-e^t)^v = (-1)^v \sum_{r=0}^{v}\binom{v}{r}(-e^t)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{v}(-1)^{v+r}\binom{v}{r}\underbrace{e^{rt}}_{\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(rt)^u}{u!}}$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v+r}\binom{v}{r}r^u}_{\#\text{ σων } \underset{\varepsilon\pi\iota}{F}: X\to Y}\frac{t^u}{u!}$$

2η λύση (με αρχή εγκλ-αποκλ)

Ω: Σύνολο διατάξεων v ανα k του $Y=\{y_1,\dots,y_v\}$

A_i = Σύνολο διατάξεων v ανα k του Y που το y_i δεν εμφ.

Τότε $\#\underset{\varepsilon\pi\iota}{f}: X\to Y = N(A_1'A_2'\dots A_v') \overset{\text{αρχή Ε-Α}}{=} \sum_{j=0}^{v}(-1)^j S_{v,j}$, όπου

$$S_{v,j} = \underbrace{\sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subseteq\{1,2,\dots,v\}} \overbrace{N(A_{i_1}\dots A_{i_j})}^{(v-j)^k}}_{\binom{v}{j}(v-j)^u}$$

Άρα $\underset{\text{επί}}{\#} f: X \to Y = \sum_{j=0}^{v} (-1)^j \binom{v}{j} (v-j)^u \overset{v-j=r}{=} \sum_{r=0}^{v} (-1)^{v-r} \binom{v}{v-r} r^u$

$= \sum_{r=0}^{v} (-1)^{v+r} \binom{v}{r} r^u \to$ όπως στην 1^{η} λύση

② Θέμα 3 / Σεπτ 2008 Ομάδα Α

a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k} = ;$, $n \in \mathbb{N}$

B) $\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j} \binom{m+j+1}{2j+1} \frac{(-1)^j}{m+j+1} = ;$, $m \in \mathbb{N}$

Λύση

a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{(n+2)(n+1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n}{k}}_{= \binom{n+2}{k+2}} \frac{(k+1)}{(n+2)(n+1)}$

$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} (k+1) = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} [(k+2)-1]$

$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} (k+2) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} \right]$

$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n+2}{k+2} \binom{n+1}{k+1} (k+2) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} \right]$

Άρα $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{j=2}^{n+2} \binom{n+2}{j}$

$= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) - \frac{1}{(n+2)(n+1)} (2^{n+2} - 1 - n - 2)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$B)\quad \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j}\binom{m+j+1}{2j+1}\frac{(-1)^j}{m+j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+1)!}{j!\,(j+1)!}\cdot\frac{(m+j+1)!}{(2j+1)!\,(m-j)!}\cdot\frac{(-1)^j}{m+j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{j!\,m!}\cdot\frac{(m+1)!}{(j+1)!\,(m-j)!}\cdot\frac{1}{m+1}(-1)^j$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{j}\binom{m+1}{m-j}(-1)^j$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\underbrace{\binom{m+1+j-1}{j}}_{\left[{m+1 \atop j}\right]}\binom{m+1}{m-j}(-1)^j$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\binom{-(m+1)}{j}\binom{m+1}{j} \overset{\text{Cauchy}}{\uparrow}{=} \frac{1}{m+1}\binom{0}{m} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m\neq 0 \end{cases}$$