12/12/23

Ασκήσεις στις Γεννήτριες Συνδυασμών - Διατάξεων

① Θέμα 4Β / Φεβ 2011

\# συνδ με επαν 3 ανα 100 του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ που

Το $\omega_1 \to$ το πολύ 1 φορά

Το $\omega_2 \to$ άρτιο πλήθος φορών

Το $\omega_3 \to$ χωρίς περιορισμό

Λύση

Β1) $A_1(t, x_1) = (tx_1)^0 + (tx_1)^1$ ← απαριθμήτρια του ω_1

$$A_2(t, x_2) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ άρτιος}}}^{\infty} (tx_2)^j = \sum_{u=0}^{\infty} \underbrace{(tx_2)^{2u}}_{((tx_2)^2)^u} = \frac{1}{1-(tx_2)^2}$$ ← του ω_2

$A_3(t, x_3) = \sum_{j=0}^{\infty} (tx_3)^j = \frac{1}{1-tx_3}$ απαριθμήτρια του ω_3

B2) $A_1(t) = A_1(t,1) = 1+t$

$A_2(t) = A_2(t,1) = \frac{1}{1-t^2}$

$A_3(t) = A_3(t,1) = \frac{1}{1-t}$

B3) Γεννήτρια συνδυασμών

$A(t) = A_1(t) A_2(t) A_3(t) = (1+t) \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}$

B4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{2 \atop k} \right] t^k$

$\Rightarrow a_k = \left[{2 \atop k} \right]$

Ζητούμενο $a_{100} = \left[{2 \atop 100} \right] = \binom{2+100-1}{100} = \binom{101}{100} = 101$

② Θέμα 4/Σεπτ 2010

a_k = # διατ. με επαν. $v+2$ ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{v+2}\}$ όπου

$\omega_1, \ldots, \omega_v \rightarrow$ χωρίς περιορισμό

$\omega_{v+1}, \omega_{v+2} \rightarrow 0$ ή 2 φορές

Λύση

B1) $E_j(t, x_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx_j)^k}{k!}$, $j = 1, 2, \ldots, v$

$E_j(t, x_j) = \frac{(tx_j)^0}{0!} + \frac{(tx_j)^2}{2!}$, $j = v+1, v+2$

Σαρώθηκε με το CamScanner

B2) $E_j(t) = E_j(t,1) = e^t \quad , j = 1,2,\dots,\nu$

$E_j(t) = E_j(t,1) = 1 + \frac{t^2}{2} \quad j = \nu+1, \nu+2$

B3) $E(t) = E_1(t) \cdots E_{\nu+2}(t)$

Εκθετική Γεννήτρια Διατ. $= (e^t)^\nu \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2 = e^{\nu t}\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4}\right)$

B4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = e^{\nu t} + t^2 e^{\nu t} + \frac{t^4}{4} e^{\nu t}$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nu^j t^{j+2}}{j!} + \frac{t^4}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^j}{j!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\nu^{k-2}) k!}{(k-2)!} \cdot \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{k!\, \nu^{k-4}}{4(k-4)!} \frac{t^k}{k!}$

Αρα

$$a_k = \begin{cases} \nu^k, & k = 0,1 \\ \nu^k + k(k-1)\nu^{k-2}, & k = 2,3 \\ \nu^k + k(k-1)\nu^{k-2} + \frac{1}{4} k(k-1)(k-2)(k-3)\nu^{k-4}, & k \geq 4 \end{cases}$$

3 Θέμα 4 / Φεβ 2010

a) a_k = # συνδ ν ανα k του $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_\nu\}$ όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον 5 φορές

β) b_k = # συνδ ν ανα k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται 1 ή 3 φορές

Λύση

α) Γεννήτρια Συνδυασμών $A(t) = (t^5+t^6+t^7+\dots)^\nu = (t^5)^\nu (1+t+t^2+\dots)^\nu$
$= t^{5\nu}\left(\frac{1}{1-t}\right)^\nu$

$$\sum_{u=0}^{\infty} a_u t^u = t^{5\nu}\left(\frac{1}{1-t}\right)^\nu = t^{5\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\left[{\nu \atop j}\right] t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left[{\nu \atop j}\right] t^{\overset{k}{\overset{\shortparallel}{5\nu+j}}}$$

$$= \sum_{u=5\nu}^{\infty}\left[{\nu \atop u-5\nu}\right] t^u$$

Άρα $a_u = \begin{cases} 0, & \text{αν } u<5\nu \\ \left[{\nu \atop u-5\nu}\right], & \text{αν } u \geq 5\nu \end{cases}$

β) Γεννήτρια Συνδ $B(t) = (t^1+t^3)^\nu = [t(1+t^2)]^\nu$
$= t^\nu(1+t^2)^\nu = t^\nu \sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j} t^{2j}$
$= \sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j} t^{\underset{u}{\underset{\shortparallel}{\nu+2j}}}$

$$= \binom{\nu}{0}t^\nu + \binom{\nu}{1}t^{\nu+2} + \binom{\nu}{2}t^{\nu+4} + \binom{\nu}{3}t^{\nu+6} + \dots + \binom{\nu}{\nu}t^{\nu+2\nu}$$

Άρα

$$B_u = \begin{cases} \binom{\nu}{j}, & \text{αν } u=\nu+2j \text{ με } j=0,1,\dots,\nu \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

ή

$$B_u = \begin{cases} \binom{\nu}{\frac{u-\nu}{2}}, & \text{αν } 2 \mid k-\nu \text{ και } \nu \leq u \leq 3\nu \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

④ Θέμα 3Β / Σεπτ 2009

$D(\nu,k)$ = # συνδ του $\Omega = \{1, 2, \dots, 3\nu+1\}$ ανά k όπου τα

$1, 2, \dots, \nu \to$ άρτιο πλήθος φορών

$\nu+1, \nu+2, \dots, 3\nu+1 \to$ το πολύ 1 φορά

$D'(\nu,k)$ = # συνδ του $\Omega = \{1, 2, \dots, 2\nu+1\}$ ανά k όπου τα

$\nu+1, \nu+2, \dots, 2\nu+1 \to$ το πολύ 1 φορά

$1, 2, \dots, \nu \to$ χωρίς περιορισμό

Να αποδειχθεί ότι $D(\nu,k) = D'(\nu,k)$

Λύση

Έστω $D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D(\nu,k) t^k$, $D'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D'(\nu,k) t^k$

οι αντιστ. γεννήτριες. Αρκεί να δείξω ότι $D(t) = D'(t)$

Έχουμε $D(t) = (t^0 + t^2 + t^4 + \dots)^\nu \cdot (t^0 + t^1)^{2\nu+1}$

$= \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^\nu (1+t)^{2\nu+1} = \frac{(1+t)^{\cancel{2\nu+1}\ \nu+1}}{(1-t)^\nu \cancel{(1+t)^\nu}}$

$D'(t) = (t^0 + t^1)^{\nu+1} \cdot (t^0 + t^1 + \dots)^\nu = (1+t)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{(1-t)^\nu}$

Άρα $D(t) = D'(t) \Rightarrow D(\nu,k) = D'(\nu,k)$

5 Θέμα 4 / Φεβρ 2002

$R(\nu,k)$ = # συνδ. ν ανα k με επαν. του $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$ όπου κάθε στοιχείο εμφαν. το πολύ 3 φορές

α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια $R_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\nu,k) t^k$

β) Να αποδειχθεί η αναδρομική σχέση

$R(\nu+1, k) = R(\nu,k) + R(\nu,k-1) + R(\nu,k-2) + R(\nu,k-3)$, $k \geq 3$

Λυση

α) $R_\nu(t) = (1+t+t^2+t^3)^\nu$

β) $\sum_{k=0}^{\infty} R(\nu+1,k) t^k = R_{\nu+1}(t) = (1+t+t^2+t^3) R_\nu(t)$

$= R_\nu(t) + R_\nu(t) + t^2 R_\nu(t) + t^3 R_\nu(t)$

$= \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j) t^j + \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j) t^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j) t^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j) t^{j+2} + \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j) t^{j+3}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} R(\nu,k) t^k + \sum_{k=1}^{\infty} R(\nu,k-1) t^k + \sum_{k=2}^{\infty} R(\nu,k-2) t^k + \sum_{k=3}^{\infty} R(\nu,k-3) t^k$

Αρα $R(\nu+1,k) = \begin{cases} R(\nu,k) & , k=0 \\ R(\nu,k) + R(\nu,k-1) & , k=1 \\ R(\nu,k) + R(\nu,k-1) + R(\nu,k-2) & , k=2 \\ R(\nu,k) + R(\nu,k-1) + R(\nu,k-2) + R(\nu,k-3) & , k \geq 3 \end{cases}$