28/11/23

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

① Αρχή Ε-Α

$A_1, A_2, \dots, A_\nu \subseteq \Omega$, $S_{\nu,0} = N(\Omega)$

$$S_{\nu,r} = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r})$$

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}$$

$$N\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i'\right) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$$

② Γενίκευση

▷ $T_{\nu,k}$ = # στοιχείων του Ω που ανήκουν σε τουλάχιστον k από τα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$

• Ειδική περίπτωση:

$T_{\nu,1} = N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu)$

ή $T_{\nu,2} = N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup \dots \cup A_{\nu-1}A_\nu)$

▷ $N_{\nu,k}$ = # στοιχείων του Ω που ανήκουν σε ακριβώς k από τα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$

• Ειδική περίπτωση:

$N_{\nu,0} = N(A_1' A_2' \dots A_\nu')$

$N_{\nu,1} = N(A_1 A_2' A_3' \dots A_\nu' \cup A_1' A_2 A_3' A_4' \dots A_\nu' \cup \dots \cup A_1' A_2' \dots A_{\nu-1}' A_\nu)$

→ ισχύει

$$T_{\nu,k} = \sum_{r=k}^{\nu} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} S_{\nu,r}$$

$$N_{\nu,k} = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} S_{\nu,r}$$

③ Ανταλλάξιμα σύνολα

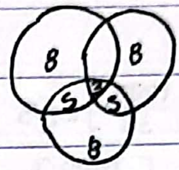
Ορισμός

$A_1, A_2, \dots A_\nu \subseteq \Omega$

$A_1, \dots, A_\nu$ ανταλλάξιμα $\iff N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = n_r \quad \forall \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, \nu\}$

Πχ: A_1, A_2, A_3 ανταλλάξιμα

$\iff$



$N(A_1) = N(A_2) = N(A_3)$

$N(A_1A_2) = N(A_1A_3) = N(A_2A_3)$

Αν $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$ ανταλλάξιμα τότε:

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} \binom{\nu}{r} n_r$$

ομοίως

$$N\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i'\right) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} \binom{\nu}{r} n_r$$

④ Άσκηση

Να βρεθεί πόσοι αριθμοί απ'το 1 ως το 1000 δεν διαιρούνται με κανέναν απ'τους 6, 10, 8

Λύση

$\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$

$A_1 = \{6, 12, 18, 24, \dots \left[\frac{1000}{6}\right] \cdot 6\} = \{x \in \Omega : 6 \mid x\}$

$A_2 = \{8, 16, 24, 32, \dots \left[\frac{1000}{8}\right] \cdot 8\}$

$A_3 = \{10, 20, \dots 1000\}$

Ζητούμενο:

$N(A_1'A_2'A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$

$N(\Omega) = 1000$, $N(A_1) = \underset{\underset{166}{\shortparallel}}{\left[\frac{1000}{6}\right]}$, $N(A_2) = \underset{\underset{125}{\shortparallel}}{\left[\frac{1000}{8}\right]}$, $N(A_3) = \underset{\underset{100}{\shortparallel}}{\left[\frac{1000}{10}\right]}$

$N(A_1A_2) = N(\{x \in \Omega : \underbrace{6|x \text{ και } 8|x}_{\Updownarrow \; \underbrace{\text{Ελπ}(6,8)}_{24}|x}\}) = \left[\frac{1000}{24}\right] = 41$

$N(A_1A_3) = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33$ $N(A_2A_3) = \left[\frac{1000}{40}\right] = 25$

$N(A_1A_2A_3) = \left[\frac{1000}{120}\right]$

Αντικαθιστούμε ... κλπ

⑤ Μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία

Πρόβλημα

ν άνθρωποι με τα καπέλα τους. Ο καθένας παίρνει ένα στη τύχη.
Πιθανότητα κανείς να μην πάρει το δικό του $= P_\nu$

$\lim\limits_{\nu \to +\infty} P_\nu = ;$

$\nu = 1$ $P_1 = 0$

$\nu = 2$ 1 2 $P_2 = \frac{1}{2}$

(1 2)
(2 1)

$\nu = 3$ 1 2 3 $P_3 = \frac{2}{6}$

(1 2 3) (3 1 2)
(1 3 2) (3 2 1)
(2 1 3)
(2 3 1)

Είναι $P_\nu = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

δυνατές $= \nu!$

ευνοϊκές = μεταθέσεις του $\{1, 2, \dots, \nu\}$ που για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$ το i δεν είναι στην i-θέση

Για την εύρεση συνοϊκών, ορίζω

$\underline{\Omega}$: Σύνολο των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,\nu\}$

A_i : Μεταθέσεις του $\{1,2,\dots,\nu\}$ που το i είναι στην i-θέση

Συνοϊκές $= N(A_1'A_2'\dots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu}(-1)^r S_{\nu,r}$

$N(\underline{\Omega}) = \nu!$

$N(A_{i_1}) = (\nu-1)! = n_1$

$N(A_{i_1}A_{i_2}) = (\nu-2)! = n_2$

$\vdots$

$N(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_r}) = (\nu-r)! = n_r$

Άρα $A_1,\dots A_\nu$ είναι ανταλλάξιμα

Συνοϊκές $= \sum_{r=0}^{\nu}(-1)^r\binom{\nu}{r}(\nu-r)!$

Άρα $P_\nu = \dfrac{\sum_{r=0}^{\nu}(-1)^r\binom{\nu}{r}(\nu-r)!}{\nu!} = \dfrac{\sum_{r=0}^{\nu}(-1)^r\frac{\nu!}{r!(\nu-r)!}(\nu-r)!}{\nu!}$

$= \sum_{r=0}^{\nu}\dfrac{(-1)^r}{r!} = 1-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\dots+(-1)^\nu\dfrac{1}{\nu!} \to \dfrac{1}{e} \simeq 40\%$

6 Άσκηση

Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 15 όμοια σφαιρίδια σε 3 διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 9, 11 και 13 αντίστοιχα

Λύση

Ισοδύναμο με # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+x_3=15$ $(*)$

με $0\le x_1\le 9$, $0\le x_2\le 11$, $0\le x_3\le 13$

Scanned with CamScanner

Ω = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_i \geq 0$, $i=1,2,3$

A_1 = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

A_2 = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 12$, $x_3 \geq 0$

A_3 = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 14$

Ζητούμενο πλήθος = $N(A_1'A_2'A_3')$ =

$= N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$

$N(\Omega) = \left[\begin{smallmatrix}3\\15\end{smallmatrix}\right]$

$N(A_1) = \left[\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right]$

$N(A_2) = \left[\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right]$

$N(A_3) = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$

$N(A_1A_2) = N(A_1A_3) = N(A_2A_3) = N(A_1A_2A_3) = 0$

Αντικαθιστώ ... κλπ

⑦ Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά ίδιας χωρητικότητας

\# κατανομών κ όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκρ κελιά χωρητικότητας m = ;

Λύση

Ισοδύναμο με \# ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = k$

με $0 \leq x_i \leq m$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$

Θέτω

$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu : x_1 + \ldots + x_\nu = k,\ x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, \ldots \nu\}$

$A_i = \{(x_1, \ldots, x_\nu) \in \Omega : x_i \geq m+1\}$

Ζητούμενο πλήθος $= N(\bigcap_{i=1}^{\nu} A'_i) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

$S_{\nu,0} = N(\Omega) = \left[\begin{smallmatrix}\nu\\k\end{smallmatrix}\right]$

Scanned with CamScanner

$1 \le r \le \nu \quad S_{\nu,r} = \sum_{\{i_1,\dots i_r\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}} N(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r})$

$N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$ = # λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = u$ $= \begin{bmatrix} \nu \\ u - r(m+1) \end{bmatrix}$

με $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_r} \geq m+1$

και τα υπολ $x_i \geq 0$

Άρα ζητούμενο πλήθος $= \begin{bmatrix} \nu \\ u \end{bmatrix} + \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} \begin{bmatrix} \nu \\ u - r(m+1) \end{bmatrix}$

$= \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} \begin{bmatrix} \nu \\ u - r(m+1) \end{bmatrix}$

⑧ Πρόβλημα Γαλιλαίου

Ρίψη ζαριού ν φορές

πιθανότητα να εμφανιστεί άθροισμα ρίψεων = u ;

Λύση

Ζητούμενη πιθανότητα $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} \begin{bmatrix} \nu \\ u-\nu-6r \end{bmatrix}}{6^\nu}$

$y_i = x_i - 1$

$0 \le y_i \le 5$

$y_1 + \dots y_\nu = u - \nu$

Δυνατή: $(x_1, x_2, \dots x_\nu)$ με $x_i \in \{1, 2, \dots 6\}$

Ευνοϊκή: $(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ με $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = u$

$x_i \in \mathbb{Z} : 1 \le x \le 6$