5/10/23

Βασικές αρχές απαρίθμησης

① Αρχές

1) Πολλαπλασιαστική
2) Προσθετική
3) Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

} απαρίθμηση συνδυαστικών σχηματισμών

4) Περιστερομηλιάς (ή Dirichlet) → Ύπαρξη σχηματισμού

② Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν ένας σχηματισμός γίνεται σε ν στάδια και

1^{o} στάδιο → κ_1 επιλογές

2^{o} στάδιο → κ_2 επιλογές

⋮

ν^{o} στάδιο → κ_ν επιλογές

τότε το πλήθος των σχηματισμών είναι $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdots \kappa_\nu$

Η αρχή ισχύει εφόσον:

1) Ο αριθμός (#) επιλογών σε κάθε στάδιο είναι ο ίδιος, ανεξάρτητα από τις προηγούμενες επιλογές

2) Οι ν-άδες επιλογών είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τους σχηματισμούς

③ Παράδειγμα

1) # 4-ψήφιων περιττών αριθμών =;

1ο Βήμα: Επιλογή 1ου ψηφίου → 9 τρόπους
2ο Βήμα: Επιλογή 2ου ψηφίου → 10 τρόπους
3ο Βήμα: Επιλογή 3ου ψηφίου → 10 τρόπους
4ο Βήμα: Επιλογή 4ου ψηφίου → 5 τρόποι

Άρα υπάρχουν 9·10·10·5 περιττοί 4-ψήφιοι

2) # 4-ψήφιων περιττών αριθμών με διαφορετικά ψηφία =;

1ο Βήμα: Επιλογή 4ου ψηφίου → 5 τρόποι
2ο Βήμα: Επιλογή 3ου ψηφίου → 9 τρόποι
3ο Βήμα: Επιλογή 2ου ψηφίου → 8 τρόποι
4ο Βήμα: Επιλογή 1ου ψηφίου → 7 ή 6 τρόποι
(ανάλογα αν έχει επιλεγεί το 0)

Δεν λειτουργεί η πολλ/κή αρχή

Εναλλακτικά:

1ο Βήμα: Επιλογή 4ου ψηφίου → 5 τρόποι
2ο Βήμα: Επιλογή 1ου ψηφίου → 8 τρόποι (όχι το 1ο, ούτε το 0)
3ο Βήμα: Επιλογή 2ου ψηφίου → 8 τρόποι
4ο Βήμα: Επιλογή 3ου ψηφίου → 7 τρόποι

Πολλ/κή αρχή → # 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία
$= 5\cdot 8\cdot 8\cdot 7$

④ Προσθετική αρχή

$A \cap B = \phi \Rightarrow N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

πληθάριθμος

⑤ Παράδειγμα (συνέχεια)

\# 4-ψηφίων περιττών αριθμών με διαφορετικά ψηφία

= # ... που το 0 δεν εμφ. (①) + #... που το 0 εμφαν στην 2η θέση (②) + # ... που το 0 εμφ. στην 3η θέση (③)

1) 4η 3η 2η 1η: 6 7 8 5 $\quad 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5$

2) 7 1 8 5 $\quad 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 5$

3) 7 8 1 5 $\quad 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 5$

\# 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία

$= 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 + 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 5 + 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 5$

$= 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5$

⑥ Παράδειγμα

Δυνητική λέξη ελληνικής γλώσσας = πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων (πχ ΒΒΑΓΓΚ)

\# δυνητικών λέξεων της ελληνικής με ν το πολύ γράμματα

$= \sum_{\kappa=1}^{\nu}$ # δυνητικών λέξεων με ακριβώς κ γράμματα $= \sum_{\kappa=1}^{\nu} 24^{\kappa} = 24 + 24^2 + 24^3 + \ldots + 24^{\nu}$

$= 24 \cdot \dfrac{24^{\nu} - 1}{24 - 1}$

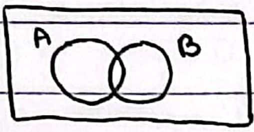
Σημείωση

$x = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \lambda x = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots + \lambda^{\nu}$

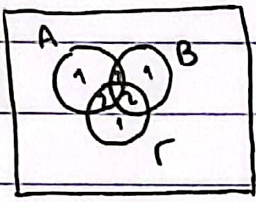
$-x = -1 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^{\nu-1}$

$(\lambda-1)x = \lambda^{\nu} - 1 \Rightarrow x = \dfrac{\lambda^{\nu}-1}{\lambda-1}$

⑦ Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού



$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$



$N(A \cup B \cup \Gamma) = N(A) + N(B) + N(\Gamma) - N(A \cap B) - N(A \cap \Gamma)$
$\quad - N(B \cap \Gamma) + N(A \cap B \cap \Gamma)$

⑧ Παράδειγμα

4-ψηφίων με διαφορετικά ψηφία που είτε το 1ο είτε το 4ο ψηφίο είναι περιττά

4-ψήφιοι με διαφορετικά ψηφία που είτε το 1ο είτε το 4ο είναι περιττά $= N(A \cup B)$

αυτοί που το 1ο είναι περιττό

4ο

Από αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

$N(A)$: | 5 | 9 | 8 | 7 | $\rightarrow N(A) = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

1ο 2ο 3ο 4ο : στάδια

$N(B)$: | 8 | 8 | 7 | 5 | $\rightarrow N(B) = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$

(όπως το αρχικό παράδειγμα) 2ο 3ο 4ο 1ο

$N(A\cap B)$: $\underset{1^o}{\overset{5}{\downarrow}}\ \underset{3^o}{\overset{8}{\downarrow}}\ \underset{4^o}{\overset{7}{\downarrow}}\ \underset{2^o}{\overset{4}{\downarrow}}$ $\rightarrow N(A\cap B) = 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7$

Άρα

$$N(A\cup B) = 5\cdot 9\cdot 8\cdot 7 + 8\cdot 8\cdot 7\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7$$
$$= 5\cdot 8\cdot 7\cdot (9+8-4)$$
$$= 5\cdot 8\cdot 7\cdot 13$$

(9) Αρχή περιστερομηλιάς (Dirichlet)

Αν έχω να μοιράσω $nk+1$ αντικείμενα σε n κελιά υπάρχει τουλάχιστον 1 κελί με τουλάχιστον k αντικείμενα

(10) Άσκηση

τρόπων να μπουν στη σειρά 10 αγόρια και 3 κορίτσια
i) χωρίς περιορισμό
ii) όλα τα αγόρια στο τέλος
iii) όλα τα αγόρια συνεχόμενα
iv) ένα αγόρι στην αρχή και ένα κορίτσι στο τέλος

Λύση

i) $\underset{1^o}{13}\ \underset{2^o}{12}\ \underset{3^o}{11}\ \ldots\ \underset{13^o}{1}$ $\rightarrow 13\cdot 12\cdot 11 \ldots 1 = 13!$

ii) $\underbrace{\underset{1^o}{3}\ \underset{2^o}{2}\ \underset{3^o}{1}}_{\text{επιλέγω κορίτσια}}\ \underbrace{\underset{4^o}{10}\ 9\ \ldots\ 1}_{\text{επιλέγω αγόρια}}$ $\rightarrow 3!\,10!$

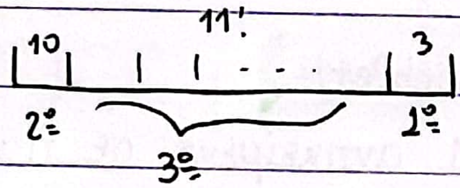
Σαρώθηκε με το CamScanner

iii) 1º Βήμα : Βάζω τα κορίτσια σε σειρά → 3! τρόποι

2º Βήμα : Βάζω τα αγόρια σε σειρά → 10! τρόποι

3º Βήμα : Επιλογή θέσης για το "μπλοκ" των αγοριών πριν, ανάμεσα ή μετά τα κορίτσια → 4 τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $3! \cdot 10! \cdot 4$ τοποθετήσεις

iv) 

Από πολ/κή αρχή έχουμε $3 \cdot 10 \cdot 11!$ τοποθετήσεις