ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

3/10/23

① Πεδίο

Συνδυαστική: Απαρίθμηση συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες

Ερώτημα:

- Με πόσους τρόπους μπορώ να...

- Πόσα αντικείμενα υπάρχουν με την ιδιότητα...

② Εφαρμογές

- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Ανάλυση Αλγορίθμων - Διακριτά Μαθηματικά

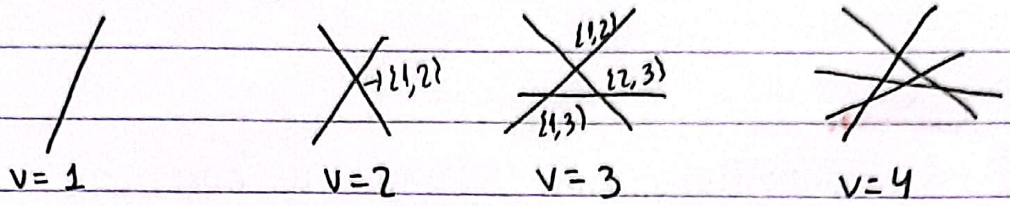
③ Διαδικαστικά μαθήματος

- Eclass → περιγραφή
- Καταγραφή / Αναμετάδοση
- Συγγράμματα : Κούτρα → φιλικό στυλ
  Χαραλαμπίδη → αυστηρό

④ Υλη

- Απαρίθμηση Διατάξεων, Συνδυασμών
- Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Εφαρμογές στις πιθανότητες

⑤ Ένα πρόβλημα



ν ευθείες στο επίπεδο σε γενική θέση (ανά δύο τεμνόμενες, ανά τρεις όχι συντρέχουσες)

Ερωτήματα

1) Πόσα σημεία τομής ορίζουν; $= a_\nu =$

2) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν; $= \beta_\nu =$

3) Πόσα χωρία ορίζουν; $= \gamma_\nu =$

Λύση

1) 1ος τρόπος (επαγωγικός)

$a_1 = 0$

$a_\nu = a_{\nu-1} + (\nu-1)$ → σημεία που προσθέτει η ν-οστή ευθεία (σημεία τομής με τις προηγ)

Έχω $a_\nu = (\nu-1) + a_{\nu-1} = (\nu-1) + (\nu-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$

2ος τρόπος (άμεσος, αντιστοιχία, πολλαπλασιαστική αρχή)

Σημείο ≡ μη διατεταγμένο ζεύγος ευθειών

Ένα διατεταγμένο ζεύγος ευθειών γίνεται σε 2 στάδια

1ο: Επιλογή 1ης ευθείας → ν τρόπους

2ο: 2ης → ν − 1

Άρα από πολλαπλασιαστική αρχή έχω $v(v-1)$ διατ. ζεύγη διακεκριμένων ευθειών

Κάθε σημείο έχει διπλομετρηθεί, άρα #(πλήθος) σημείων $= \frac{v(v-1)}{2}$

2) 1ος τρόπος (Επαγωγικός)

$B_1 = 0$

$B_2 = 0$

$B_3 = 3$

$B_4 = 8$

$$B_v = B_{v-1} + \underbrace{v-1}_{} + \overbrace{v-2}^{\text{απλά ευθύγρ. τμήμ. στην ευθεία } v-1} = B_{v-1} + 2v-3, \; v \geq 3$$

απλά ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργεί η ευθεία v στις προηγούμενες

$$B_v = (2v-3)+(2v-1)+B_{v-2} = \ldots = (2v-3)+(2v-1)+\ldots+(2*3-1)+B_2 =$$

$$= 2(v-1)+2(v-2)+\ldots+2(3-2)-(v-2)$$

$$= 2\frac{(v-2)(v-1)}{2} - (v-2)$$

$$B_v = v(v-2)$$

2ος τρόπος

Κάθε ευθεία τέμνεται από τις άλλες σε $v-1$ σημεία που δημιουργούν $v-2$ ευθ. τμήματα (απλά) και 2 ημιευθείες # ευθ. τμημ $= v(v-2)$

3) $1^{ος}$ τρόπος (επαγωγικός)

$\gamma_1 = 2$

$\gamma_2 = 4$

$\gamma_3 = 7$

$\gamma_4 = 11$

$\gamma_\nu = \gamma_{\nu-1} + \nu$ → Η ν-οστή ευθεία $\nu \geq 1$ χωρίζει κάποια από τα προϋπάρχοντα χωρία σε 2 κομμάτια

Ο αριθμός των χωρίων απ'τα οποία περνάει είναι ν, όσα και τα κομμάτια στα οποία χωρίστηκε η ευθεία ν

$$\gamma_\nu = \nu + (\nu-1) + \dots + 2 + \overset{=2}{\gamma_1}$$
$$= \frac{\nu(\nu+1)}{2} + 1 = \frac{\nu^2+\nu+2}{2}$$

$$\gamma_\nu = \nu + \gamma_{\nu-1} = \nu + (\nu-1) + \gamma_{\nu-2} = \nu + (\nu-1) + \dots + 2 + \gamma_1$$

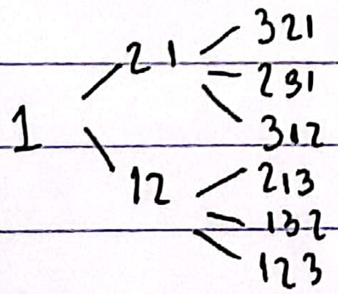
6) Μεταθέσεις ν στοιχείων

Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω τα $1, 2, \dots, \nu$ σε σειρά $= a_\nu =$;

$\nu = 1$: 1

$\nu = 2$: 21 12

$\nu = 3$: 321 231 213 312 132 123



<u>1ος τρόπος</u> (επαγωγικός)

Από κάθε μετάθεση των $\nu-1$ αριθμών $1,2,\dots,\nu-1$ δημιουργούνται ν μεταθέσεις των ν αριθμών $1,2,\dots,\nu$ αφού ο ν τοποθετείται είτε στην αρχή είτε ενδιάμεσα ή στο τέλος (ν θέσεις)

Άρα $a_\nu = \nu a_{\nu-1},\ \nu \geq 2$

$a_1 = 1$

οπότε $a_\nu = \nu(\nu-1)\dots 2\overset{=1}{a_1}$

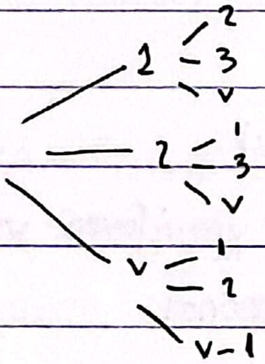
<u>2ος τρόπος</u> (πολλαπλασιαστική αρχή)

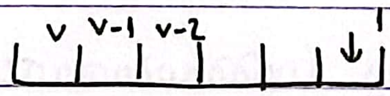
Μια μετάθεση γίνεται σε ν στάδια

1ο στάδιο: Επιλογή αριθμού για 1η θέση →

2ο   2η →

νο νη





Απο πολλ/κή αρχή $a_\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots 1 = \nu!$

⑦ Πλήθος υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, \nu\}$

\# υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, \nu\} = a_\nu$

1ος τρόπος (επαγωγικός)

$\nu=0$	$\nu=1$	$\nu=2$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$ $\{1\}$ $\{1,2\}$ $\{2\}$
	$\{1\}$	

$a_0 = 1$

$a_\nu = 2a_{\nu-1}, \ \nu \geq 1$

Από κάθε υποσύνολο Α του $\{1, 2, \ldots, \nu-1\}$ παίρνω 2 υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, \nu\}$: A, $A \cup \{\nu\}$

Τελικά $a_\nu = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\nu} \underbrace{a_0}_{1} = 2^\nu$

2ος τρόπος (πολλαπλασιαστική αρχή)

Για τη δημιουργία ενός υποσυνόλου χρειάζονται ν στάδια

1ο : Να βάλω ή όχι το $1 \to 2$ τρόποι

2ο $\qquad 2 \to 2$

νο $\qquad \nu \to 2$

Άρα $a_\nu = 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^\nu$