12/12/2023

Ασκήσεις στις Γεννήτριες Συνδυασμών - Διατάξεων

① Θέμα 4β | Φεβρ. 2011

συνδυασμών με επανάληψη 3 ανά 100 του

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ με:

το ω_1 → το πολύ 1 φορά

το ω_2 → άρτιο πλήθος φορών.

το ω_3 → χωρίς περιορισμό.

Λύση

B_1] $A_1(t, x_1) = (tx_1)^0 + (tx_1)^1$

$$\left((tx_2)^2\right)^k$$

$$A_2(t, x_2) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ άρτιος}}}^{\infty} (tx_2)^j = \sum_{k=0}^{\infty} (tx_2)^{2k} = \frac{1}{1-(tx_2)^2}$$

$$A_3(t, x_3) = \sum_{j=0}^{\infty} (t x_3)^j = \frac{1}{1 - t x_3}$$

B2) $A_1(t) = A_1(t,1) = 1 + t.$

$A_2(t) = A_2(t,1) = \frac{1}{1-t^2}.$

$A_3(t) = A_3(t,1) = \frac{1}{1-t}.$

B3) Γεννήτρια Συνδυασμών.

$$A(t) = A_1(t) A_2(t) A_3(t) = (1+t) \frac{1}{\cancel{1-t^2}_{(1-t)}} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

B4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k = A(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} t^k.$

$\Longrightarrow a_k = \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}$

Ζητούμενο:

$$a_{100} = \begin{bmatrix} 2 \\ 100 \end{bmatrix} = \binom{2+100-1}{100} = \binom{101}{100} =$$

$= 101.$

② Θέμα 4 | Σεπτ. 2010

$a_k = \#$ διατάξεων με επανάληψη $(\nu+2)$ ανά k του

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+2}\}$, όπου

$\omega_1, \dots, \omega_\nu \to$ χωρίς περιορισμό

$\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2} \to 0$ ή 2 φορές

$\to$ Λύση:

↳ Λύση:

B1)

$$E_j(t,x_j)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx_j)^k}{k!}, \quad j=1,2,\dots,v.$$

$$E_j(t,x_j)=\frac{(tx_j)^0}{0!}+\frac{(tx_j)^2}{2!}, \quad j=v+1,v+2.$$

B2)

$$E_j(t)=E_j(t,1)=e^t, \quad j=1,2,\dots,v$$
$$E_j(t)=E_j(t,1)=1+\frac{t^2}{2}, \quad j=v+1,v+2.$$

B3)

$$E(t)=E_1(t)\cdot\ldots\cdot E_{v+2}(t)=$$

Εκθετική γεννήτρια διατάξεων.

$$=(e^t)^v\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2=e^{vt}\left(1+t^2+\frac{t^4}{4}\right).$$

$$A(t)=B(t)\Gamma(t)$$
$$\hookrightarrow a_n=b_0\gamma_n+b_1\gamma_{n-1}+\dots+b_n\gamma_0$$

B4)

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!}=e^{vt}+t^2e^{vt}+\frac{t^4}{4}e^{vt}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(vt)^j}{j!}+t^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(vt)^j}{j!}+\frac{t^4}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(vt)^j}{j!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}v^k\frac{t^k}{k!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k!\,v^{k-2}}{(k-2)!}\cdot\frac{t^k}{k!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{k!\,v^{k-4}}{4(k-4)!}\frac{t^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\nu^{k-2}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{4} k(k-1)(k-2)(k-3) \cdot \nu^{k-4} \frac{t^k}{k!}$$

Άρα,

$$a_k = \begin{cases} \nu^k & , k=0,1 \\ \nu^k + k(k-1)\nu^{k-2} & , k=2,3 \\ \nu^k + k(k-1)\nu^{k-2} + \frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)\nu^{k-4} & , k \geq 4 \end{cases}$$

③ Θέμα 4| Φεβρ 2010

ⓐ $a_k = \#$ συνδυασμών ν ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$ όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον 5 - φορές.

ⓑ $b_k = \#$ συνδυασμών ν ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$ όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται 1 ή 3 φορές.

Λύση:

ⓐ Γεννήτρια συνδυασμών $A(t) = (t^5 + t^6 + t^7 + \dots)^\nu =$

$$= (t^5)^\nu (1 + t + t^2 + \dots)^\nu =$$

$$= t^{5\nu} \left(\frac{1}{1-t}\right)^\nu$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^{5\nu}\left(\frac{1}{1-t}\right)^\nu = t^{5\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \nu \\ j \end{bmatrix} t^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \nu \\ j \end{bmatrix} t^{\overbrace{5\nu + j}^{=k}} = \sum_{k=5\nu}^{\infty} \begin{bmatrix} \nu \\ k-5\nu \end{bmatrix} t^k .$$

Άρα,

$$a_\kappa = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } \kappa < 5\nu \\ \left[\kappa \overset{\nu}{-} 5\nu\right] & , \text{ αν } \kappa \geq 5\nu . \end{cases}$$

β) Γεννήτρια συνδυασμών $B(t) = (t^1 + t^3)^\nu =$

$$= t^\nu (1+t^2)^\nu =$$

$$= t^\nu = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} t^{2j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} t^{\overset{=\kappa}{\nu+2j}} = \binom{\nu}{0} t^\nu + \binom{\nu}{1} t^{\nu+2} + \binom{\nu}{2} t^{\nu+4} + \dots$$

$$\dots + \binom{\nu}{\nu} t^{\nu+2\nu} .$$

Άρα,

$$b_\kappa = \begin{cases} \binom{\nu}{j} & , \text{ αν } \kappa = \nu+2, \text{ με } j = 0,1,\dots,\nu . \\ 0 & , \text{ διαφορετικά} . \end{cases}$$

ή

$$b_\kappa = \begin{cases} \binom{\nu}{\frac{\kappa-\nu}{2}} & , \text{ αν } 2 \mid \kappa-\nu \text{ και } \nu \leq \kappa \leq 3\nu . \\ 0 & , \text{ διαφορετικά} . \end{cases}$$

④ Θέμα 3 | Σεπτέμβριος 2005

$D(\nu,\kappa)$ = # συνδυασμών του $\Omega=\{1,2,\dots,3\nu+1\}$ ανά κ, όπου τα $1,2,\dots,\nu \to$ άρτιο πλήθος φορών και $\nu+1,\nu+2,\dots,3\nu+1 \to$ το πολύ 1 φορά

$D'(\nu,\kappa)$ = # συνδυασμών του $\Omega=\{1,2,\dots,2\nu+1\}$ ανά κ όπου τα $\nu+1,\nu+2,\dots,2\nu+1 \to$ το πολύ 1 φορά και τα $1,2,\dots,\nu$ χωρίς περιορισμό

Να αποδειχθεί ότι $D(\nu,\kappa)=D'(\nu,\kappa)$.

Λύση:

Έστω $D(t)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} D(\nu,\kappa)t^{\kappa}$, $D'(t)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} D'(\nu,\kappa)t^{\kappa}$, οι αντίστοιχες γεννήτριες.

Αρκεί νδο $D(t)=D'(t)$. Έχουμε:

$$D(t)=(t^0+t^2+t^4+\dots)^{\nu}(t^0+t^1)^{2\nu+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{1-t^2}\right)^{\nu}(1+t)^{2\nu+1}=\frac{1}{(1-t)^{\nu}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{\nu}}(1+t)^{2\nu+1}=$$

$$=\frac{(1+t)^{\nu+1}}{(1-t)^{\nu}}$$

$$D'(t)=(t^0+t^1)^{\nu+1}(t^0+t^1+\dots)^{\nu}=(1+t)^{\nu+1}\frac{1}{(1-t)^{\nu}}$$

Άρα, $D(t)=D'(t) \Rightarrow D(\nu,\kappa)=D'(\nu,\kappa)$.

(5) Θέμα 4 | Φεβρ. 2002

$R(\nu,\kappa)$ = # συνδυασμών ν ανά κ με επανάληψη του $\underline{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$, όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται το πολύ 3 φορές.

(α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια

$$R_\nu(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} R(\nu,\kappa) t^\kappa.$$

(β) Να αποδειχθεί η αναδρομική σχέση:

$$R(\nu+1,\kappa) = R(\nu,\kappa) + R(\nu,\kappa-1) + R(\nu,\kappa-2) + R(\nu,\kappa-3),$$

για $\kappa \geq 3$.

Λύση:

(α) $R_\nu(t) = (1+t+t^2+t^3)^\nu$

(β)
$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} R(\nu+1,\kappa)t^\kappa = R_{\nu+1}(t) = (1+t+t^2+t^3)R_\nu(t) =$$
$$= R_\nu(t) + tR_\nu(t) + t^2R_\nu(t) + t^3R_\nu(t) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j)t^j + \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j)t^{j+1} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j)t^{j+2} + \sum_{j=0}^{\infty} R(\nu,j)t^{j+3} =$$
$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} R(\nu,\kappa)t^\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\infty} R(\nu,\kappa-1)t^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} R(\nu,\kappa-2)t^\kappa +$$
$$+ \sum_{\kappa=3}^{\infty} R(\nu,\kappa-3)t^\kappa$$

Άρα,

$$R(v+1,k)=\begin{cases} R(v,k), & k=0 \\ R(v,k)+R(v,k-1), & k=1 \\ R(v,k)+R(v,k-1)+R(v,k-2), & k=2 \\ R(v,k)+R(v,k-1)+R(v,k-2)+R(v,k-3) & \text{Lo } k\geq 3 \end{cases}$$