$(3!)^3$ $(3!)^2$ $3!$

5/12/2023

Γεννήτριες Συνδυασμών

① Βασικό Πρόβλημα

#συνδυασμών ν ανά κ του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ όπου το ω_i εμφανίζεται n_i φορές με $n_i \in A_i$ όπου A_i, $i = 1, 2, \dots, \nu$ είναι δοσμένα σύνολα.

② Παράδειγμα

#συνδυασμών 4 ανά κ του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ όπου

ω_1 εμφανίζεται 1 ή 2 ή 3 φορές

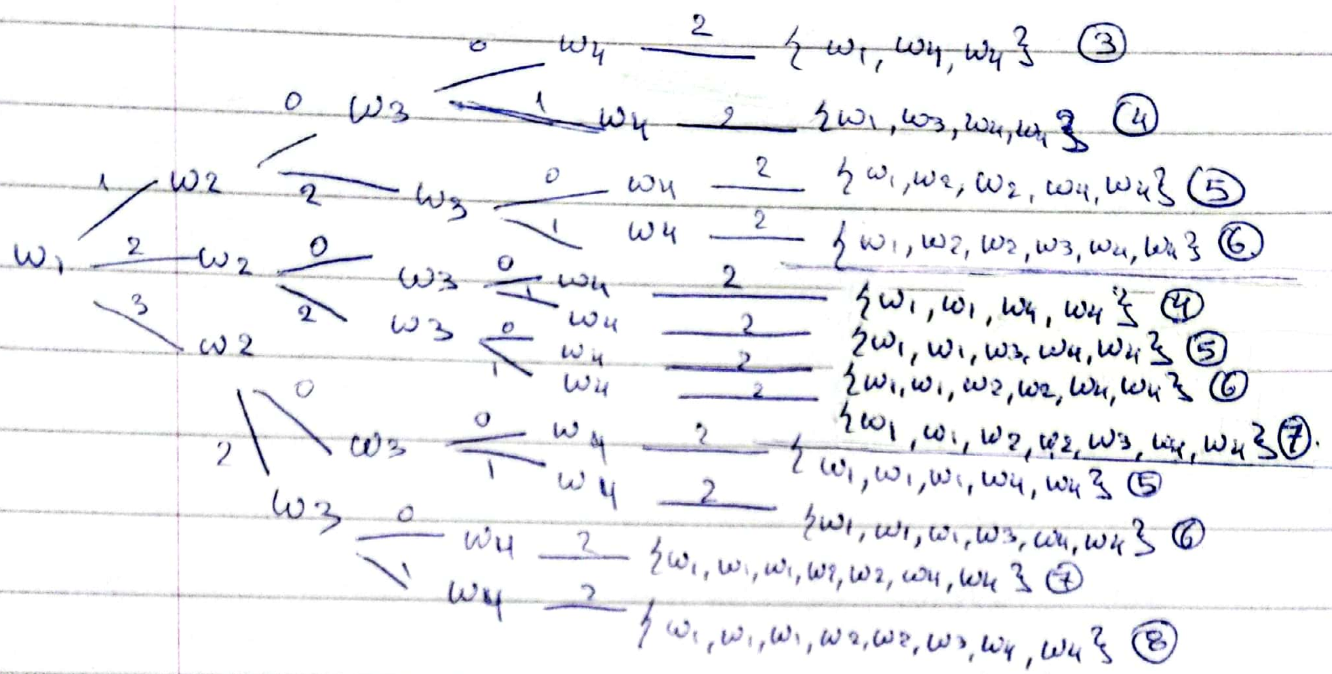
ω_2 εμφανίζεται 0 ή 2 φορές

ω_3 εμφανίζεται το πολύ 1 φορά.

ω_4 εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

($A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{0, 2\}$, $A_3 = \{0, 1\}$, $A_4 = \{2\}$).

③ Λύση



Πουνδ. 4 ανά κ

κ	α
0	0
1	0
2	0
3	1
4	2
5	3
6	3
7	2
8	1
9	0
10	0

④ Αλγεβροποίηση της διαδικασίας

Δένδρο <—> Αλγεβρική Παράσταση.

ω_j <—> Μεταβλητή

$$(x_1^1 + x_1^2 + x_1^3)(x_2^0 + x_2^1)(x_3^0 + x_3^1)x_4^2 =$$

$$= x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2 + x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^2 + x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^2 + \dots + x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2$$

A_j <—> πολυώνυμο του x_j : $\sum_{r_j \in A_j} x_j^{r_j}$

Πρόβλημα!

Δεν φαίνεται άμεσα ποιοι συνδυασμοί έχουν k στοιχεία.

Λύση:

Αντί για ω_j <—> x_j, να έχω ω_j <—> tx_j

Τότε $$\left((tx_1)^1 + (tx_1)^2 + (tx_1)^3\right)\left((tx_2)^0 + (tx_2)^2\right)\left((tx_3)^0 + (tx_3)^1\right) \cdot (tx_4)^2 =$$

$$= t^3 x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2 + t^4 x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^2 + t x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^2 + \dots + t^0 x_1^3 x_2^0 x_3^1 x_4^2.$$

Με ενδιαφέρει όμως το πόσοι είναι οι συνδυασμοί, όχι ποιοι είναι. Μπορεί να απλοποιηθεί η διαδικασία; → Ναι, θέτοντας όλα τα $x_i = 1$.

Άρα,

$$(t^1+t^2+t^3)(t^0+t^2)(t^0+t^1)\,t^2 =$$
$$= t\,(1+t+t^2)(1+t^2)(1+t)\,t^2 = t\,(1+t+2t^2+t^3+t^4)(1+t)\,t^2$$
$$= t^3\,(1+t+2t^2+t^3+t^4+t+t^2+2t^3+t^4+t^5) =$$
$$= t^3\,(1+2t+3t^2+3t^3+2t^4+t^5) =$$
$$= 1\cdot t^3+2\cdot t^4+3t^5+3t^6+2t^7+t^8$$

(*) Ο συντελεστής των t^k δίνει το # συνδυασμών 4 ανά k
με τον περιορισμό τα $t_j=1$

(5) Συστηματοποίηση διαδικασίας

συνδυασμών ν ανά κ που το ω_i εμφανίζεται n_i φορές
με $n_i \in A_i$, $i=1,2,\ldots,\nu$.

B1) $\omega_j \Longleftrightarrow tx_j$

Απαριθμήτρια Συνάρτηση του x_j

$$A_j(t;x_j) = \sum_{n_j \in A_j} (tx_j)^{n_j}$$

στιλ

B2) $A_j(t) = A_j(t,1)$

B3) $A(t) = A_1(t)\,A_2(t)\cdots A_\nu(t)$ = Γεννήτρια Συνδυασμών.

B4) $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \longrightarrow$ # συνδ. ν ανά κ με τους περιορισμούς.

σύνολο

⑥ Βασικές γεννήτριες.

$$(1+t)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu \text{ ή } \infty} \binom{\nu}{k} t^k$$

$$(1-t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

$$(1-t)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{\nu \atop k}\right] t^k$$

⑦ Θέμα 4 / Σεπτ. 2012

$a_k = \#$ επαναληπτικοί συνδυασμοί των $(\nu+2)$ στοιχείων του Ω ανά k ($\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+1}\}$), όπου ω_0 επιτρέπεται περιττό αριθμό φορών, $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται 1 ή 2 φορές, τα υπόλοιπα οσεσδήποτε φορές.

Λύση:

$\boxed{B_1}$ $A_0(t, x_0) = (tx_0)^1 + (tx_0)^3 + (tx_0)^5 + \dots$

$$A_j(t, x_j) = \sum_{n_j=0}^{\infty} (tx_j)^{n_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu$$

$$A_{\nu+1}(t, x_{\nu+1}) = (tx_{\nu+1})^1 + (tx_{\nu+1})^2.$$

$\boxed{B_2}$ $A_0(t) = t + t^3 + t^5 + \dots = t \dfrac{1}{1-t^2} = t(t^0 + t^2 + t^4 + \dots) =$

$$= t \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} = t \sum_{k=0}^{\infty} (t^2)^k$$

$$A_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad j=1,2,\dots,\nu.$$

$$A_{\nu+1}(t) = t^1 + t^2 = t(1+t).$$

$\boxed{B_3}$ Γεννήτρια Συνδυασμών.

$$A(t) = t\,\frac{1}{1-t^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu} t(1+t)$$

$\boxed{B_4}$ $$A(t) = t^2\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu+1} = t^2 \sum_{j=0}^{\infty}\left[\begin{matrix}\nu+1\\ j\end{matrix}\right] t^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\begin{matrix}\nu+1\\ j\end{matrix}\right] t^{j+2} \overset{j+2=k}{=\!=\!=} \sum_{k=2}^{\infty}\left[\begin{matrix}\nu+1\\ k-2\end{matrix}\right] t^k$$

Άρα,

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{για } k=0,1 \\ \left[\begin{matrix}\nu+1\\ k-2\end{matrix}\right], & \text{για } k\geq 2 \end{cases}$$

(8) Θέμα 4 | Σεπτ 2011

$a_k = \#$ επαναλ. συνδ. των $2\nu+2$ στοιχείων του

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu+2}\}$ ανά k, όπου

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu+1}$ εμφ. το πολύ 1 φορά το καθένα.

$\omega_{2\nu+2}$ εμφ. άρτιο αριθμό φορών.

(a) Γεννήτρια $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t)$

(b) $a_k - a_{k-1} = ;$

(γ) $a_\nu = ;$

(a)

$\boxed{B_1}$ $A_j(t,x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1, \quad j=1,\dots,2\nu+1$

$$A_{2\nu+2}(t, x_{2\nu+2}) = \sum_{\substack{r=0 \\ r \text{ άρτιος}}}^{\infty} (t\, x_{2\nu+2})^r$$

$\boxed{B_2}$ $A_j(t) = 1+t, \quad j=1,2,\dots,2\nu+1$

$$A_{2\nu+2}(t) = 1+t^2+t^4+\dots = \frac{1}{1-t^2}$$

$$A(t) = A_1(t)A_2(t)\cdot\ldots\cdot A_{2\nu+2}(t) =$$

$$= (1+t)^{2\nu+1}\frac{1}{1-t^2} = (1+t)(1-k) =$$

$$= (1+t)^{2\nu}\frac{1}{1-t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{2\nu}{k}}_{b_k} t^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{1}_{\gamma_k} \cdot t^k$$

<u>Υπενθύμιση</u>

$$A(t) = B(t)\,\Gamma(t)$$

$$\iff a_k = b_0\gamma_k + b_1\gamma_{k-1} + b_2\gamma_{k-2} + \dots + b_k\gamma_0$$

1

Άρα, $a_k = \binom{2\nu}{0}\cdot 1 + \binom{2\nu}{1}\cdot 1 + \dots + \binom{2\nu}{k}\cdot 1 =$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{2\nu}{i}$$

το έχουμε υπολογίσει στα αθροίσματα με συμμετρία.

(6) $$a_k - a_{k-1} = \sum_{i=0}^{k}\binom{2\nu}{i} - \sum_{i=0}^{k-1}\binom{2\nu}{i} = \binom{2\nu}{k}$$

(8) $$a_\nu = \sum_{i=0}^{\nu}\binom{2\nu}{i} = \binom{2\nu}{0}+\binom{2\nu}{1}+\binom{2\nu}{2}+\dots\dots+\binom{2\nu}{\nu} = S$$

$$2S = \binom{2\nu}{0}+\binom{2\nu}{1}+\dots+\binom{2\nu}{\nu-1}+\binom{2\nu}{\nu}+$$
$$+\binom{2\nu}{2\nu}+\binom{2\nu}{2\nu-1}+\dots+\binom{2\nu}{\nu+1}+\binom{2\nu}{\nu} =$$
$$= 2^{2\nu}+\binom{2\nu}{\nu}.$$

Άρα,

$$a_\nu = \frac{2^{2\nu}+\binom{2\nu}{\nu}}{2}.$$