30/11/2023

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Ασκήσεις

① Παιχνίδι Chuck-a-Luck

Ζάρι ρίχνεται 3 φορές

Π.θ. να εμφανιστεί τουλ. 1 εξάρι =)

Λύση:

Α' τρόπος

$$\text{Πιθανότητα} = \frac{\text{Ευνοϊκά Αποτελέσματα}}{\text{Δυνατά Αποτελέσματα}}$$

$$\text{Αποτέλεσμα} = (\underbrace{x_1}_{\text{αποτ. } 1^{ης} \text{ ρίψης}}, \underbrace{x_2}_{\text{αποτ. } 2^{ης} \text{ ρίψης}}, \underbrace{x_3}_{\text{αποτ. } 3^{ης} \text{ ρίψης}})$$

Ω: Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων: $N(\Omega) = 6^3$.

A_i: Σύνολο αποτελεσμάτων στα οποία εμφανίζεται εξάρι στην i ρίψη, $i = 1,2,3$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$: Σύνολο ευνοϊκών αποτελεσμάτων.

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1A_2) - N(A_1A_3) - N(A_2A_3) + N(A_1A_2A_3).$$

$N(A_i) = 6^2 = 36$

$N(A_iA_j) = 6^1 = 6, \quad i \neq j$

$N(A_1A_2A_3) = 6^0 = 1.$

(*) Σε κάθε ρίψη έχω 1/6 πιθανότητα να έρθει 6άρι.

Άρα,

$$\text{Πιθανότητες} = \frac{N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}{N(\Omega)} = \frac{3 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 1}{6^3} = \frac{91}{216}$$

Β' τρόπος

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(\Omega) - \underbrace{N(A_1' A_2' A_3')}_{\text{όλα τα αποτελέσματα που δεν εμφανίζεται εξάρι}} = 6^3 - 5^3$$

ίσως τα συμπληρώματα να είναι πιο απλά στη διαχείριση

Άρα,

$$\text{Πιθανότητα} = \frac{6^3 - 5^3}{6^3} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$$

② Θέμα 3 | Φεβρ 2002

αριθμών από το $\{1, 2, \dots, 2002\}$ που:

ⓐ διαιρούνται με τουλάχιστον 1 από τους 6, 10, 15;

ⓑ διαιρούνται με ακριβώς 2 από τους 6, 10, 15

Λύση:

ⓐ $\Omega = \{1, 2, \dots, 2002\}$

$A_1 = \{x \in \Omega : 6 | x\}$

$A_2 = \{x \in \Omega : 10 | x\}$

$A_3 = \{x \in \Omega : 15 | x\}$

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 A_2) - N(A_1 A_3) - N(A_2 A_3) + N(A_1 A_2 A_3) =$$

$\text{ΕΚΠ}(6,10)$

$$= \left\lfloor \frac{2002}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{15} \right\rfloor -$$

$$- \left\lfloor \frac{2002}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2002}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2002}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{30} \right\rfloor =$$

$$= 333 + 200 + 133 - 2 \cdot 66 = 534.$$

(β) $$\underbrace{\overbrace{N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3)}^{\text{τουλ. με 2}} - \overbrace{N(A_1A_2A_3)}^{\text{ακριβώς με 3}}}_{\text{ακριβώς με 2}} =$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - \\ &- N(A_1A_2A_1A_3) - N(A_1A_2A_2A_3) - N(A_1A_3A_2A_3) + \\ &+ N(A_1A_2A_1A_3A_2A_3) - N(A_1A_2A_3) = 0 \end{aligned}}_{\text{όλοι οι όροι είναι } \left\lfloor \frac{2002}{30} \right\rfloor}$$

(3) Θέμα 3 | Νοέμβριος 2003

20 φορές:

↳ Πέφτει πολύ αυτό το στυλ. (όπως και το (4), ίδιο)

- Εξαγωγή
- Καταγραφή
- Επιστροφή

} τραπουλόχαρτου από συνήθη τράπουλα (52φ χωρίς μπαλαντέρ).

A 2 3 . . . 10 J Q K

♣

♢

♡

♠

Άρα, ορίζω τα σύνολα ανάποδα για να χρησιμοποιήσω τον $T = N(A_1' A_2' A_3' A_4')$

τομή δλδ.

Αποτέλεσμα = Εικοσάδα τραπουλόχαρτων (διατεταγμένη).

$T = \#$ αποτ. που εμφ. και οι 4 A της τράπουλας ($A♣$, $A♦$, $A♥$, $A♠$). $=;$

Λύση:

Ω = σύνολο αποτελεσμάτων $\Longrightarrow N(\Omega) = 52^{20}$ (από πολλαπλασιαστική αρχή)

$\{(x_1, x_2, \dots, x_{20}) : x_i \in \text{τράπουλα}\}$

A_1 = Σύνολο αποτελεσμάτων που <u>δεν</u> εμφ. ο $A♣$

A_2 = Σύνολο αποτελεσμάτων που <u>δεν</u> εμφ. ο $A♦$

A_3 = Σύνολο αποτελεσμάτων που <u>δεν</u> εμφ. ο $A♥$

A_4 = Σύνολο αποτελεσμάτων που <u>δεν</u> εμφ. ο $A♠$

$T = N(A_1' A_2' A_3' A_4')$

Από Αρχή Ε-Α, έχουμε:

$$N(A_1' A_2' A_3' A_4') = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r S_{4,r}$$

με:

$$S_{4,0} = N(\Omega) = 52^{20}$$

$$S_{4,1} = \sum_{i=1}^{4} N(A_i) N(A_1' A_2' A_3' A_4') = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r S_{4,r} =$$

$$= \binom{4}{1} 51^{20}$$

$$S_{4,2} = \binom{4}{2} 50^{20}$$

$$S_{4,3} = \binom{4}{3} 49^{20}$$

$$S_{4,4} = \binom{4}{4} 48^{20}$$

ΛΑΘΟΣ ΛΥΣΗ:

Με Πολλαπλή Αρχή

ΛΑΘΟΣ

~~1ο Βήμα: Επιλογή θέσης για το A ♣ → 20 θέσεις~~

~~2ο Βήμα: Επιλογή θέσης για το A ♦ → 19 θέσεις~~

~~3ο Βήμα: Επιλογή θέσης για το A ♥ → 18 θέσεις~~

~~4ο Βήμα: Επιλογή θέσης για το A ♠ → 17 θέσεις~~

~~5ο Βήμα: Επιλογή θέσης για τα Υπόλοιπα → 52^{16} θέσεις~~

~~$\#$τρόπων $= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 52^{16}$~~

ΛΑΘΟΣ.

(*) Το λάθος είναι ότι έχουν γίνει διπλοεγγραφές.

πχ:

Το αποτέλεσμα

$(A♣, A♦, A♥, A♠, \underbrace{A♥, 2♦, 2♦, \ldots, 2♦}_{15})$

προκύπτει:

1ο Βήμα: A ♣ → 1η θέση

2ο Βήμα: A ♦ → 2η θέση

3ο Βήμα: A ♥ → 3η θέση ή 5η θέση.

4ο Βήμα: A ♠ → 4η θέση

5ο Βήμα: A ♥ → 5η θέση

2♦ στις 6η έως 20η θέση

Διαφορετικές Επιλογές ίσως οδηγούν στο ίδιο αντικείμενο

Τράπουλα → 52 φύλλα

Εξαγωγές → 20

Περιορ. εμφαν. → 4 φύλλα
τουλ. 1

$$T = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4}{r} (52-r)^{20}$$

ίδιο με το 3, πέφτει πολύ.

4 Θέμα 3 | Μάρτιος 2004

τρόπων να γράψουμε λέξη (πιθανώς χωρίς νόημα) με 6 γράμματα από το αλφάβητο χρησιμοποιώντας τα {Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι} ώστε να εμφανίζονται όλα τα φωνήεντα.

Λύση:

Ίδιο μοντέλο με το προηγούμενο θέμα, όπου η τράπουλα είναι το αλφάβητο (9), οι εξαγωγές είναι το μήκος της λέξης (6), οι (4) άσσοι είναι τα (4) φωνήεντα.

$$\# = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4}{r} (9-r)^6 .$$

5 Θέμα 3 | Σεπτ 2005

Κατασκευάζουμε 6-ψήφιο αριθμό επιλέγοντας ψηφία από τα 1, 2, ..., 7.

ⓐ Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν; 7^6

ⓑ Πόσοι από αυτούς περιέχουν τα ψηφία 1,2,3;

Λύση:

ⓑ Ίδιο μοντέλο με πριν.

52 τρόποι <–> 7 Αριθμοί {1,2,...,7}

20 Εξαγ. <–> 6 Μήκος αριθμού.

4 Άσσοι <–> 3 Ψηφία 1,2,3.

$$\# = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \binom{3}{r} (7-r)^6$$

(*) Αν έχω κάποιου είδους διάταξη που να θέλει να εμφανίζονται υποχρεωτικά κάποια στοιχεία πω με αρχή Ε-Α.

ΟΧΙ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ.

ⓑ Θέμα 3 | Σεπτ. 2012

3Α, 3Β, 3Γ.

ⓐ #τρόπων τοποθέτησης σε σειρά =;

ⓑ #τρόπων τοποθέτησης σε σειρά ώστε τα 3Α να είναι συνεχόμενα =;

ⓒ #τρόπων τοποθέτησης σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν 3 όμοια συνεχόμενα γράμματα =;

Λ

Λύση:

(α) Μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων:

$$\begin{aligned} A &\to k_1 = 3 \text{ φορές} \\ B &\to k_2 = 3 \text{ φορές} \\ \Gamma &\to k_3 = 3 \text{ φορές} \end{aligned} \quad = \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$$

(β) Μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων:

$$\begin{aligned} AAA &\to k_1 = 1 \text{ φορά} \\ B &\to k_2 = 3 \text{ φορές} \\ \Gamma &\to k_3 = 3 \text{ φορές} \end{aligned} \quad = \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{7!}{1!\,3!\,3!} =$$

επιλέγω θέση για το αρχικό A

$$= \frac{7!}{(3!)^2} = 7 \cdot \frac{(3+3)!}{3!\cdot 3!}$$

B, Γ

(γ) Ω = Λέξεις με 3A, 3B, 3Γ $\quad N(\Omega) \overset{(α)}{=} \frac{9!}{3!\,3!\,3!}$

Ζητ. $\# = N(A_1' A_2' A_3')$,

όπου A_1: Λέξεις που τα 3A είναι σε σειρά.

A_2: Λέξεις που τα 3B είναι σε σειρά.

A_3: Λέξεις που τα 3Γ είναι σε σειρά.

$$N(\Omega) = \frac{(3+3+3)!}{3!\,3!\,3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$$

$$N(A_1) = N(A_2) = N(A_3) \overset{(β)}{=} \frac{(1+3+3)!}{1!\,3!\,3!} = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$N(A_1A_2) = N(A_1A_3) = N(A_2A_3) = \frac{(1+1+3)!}{1!\,1!\,3!} = \frac{5!}{3!}$$

$$N(A_1A_2A_3) = 3!$$

Άρα,

<u>Ζητούμενο Πλήθος:</u>

$$\frac{9!}{(3!)^3} - 3\frac{7!}{(3!)^2} + 3\frac{5!}{3!} - 3!.$$