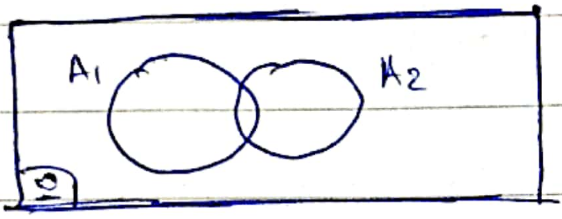
Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

(1) Αρχή Ε-Α για 2 σύνολα



$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2).$$

* Θεωρούμε $A_1A_2 = A_1 \cap A_2$

συμπλήρωμα του A.

προσθετική αρχή.

Απόδειξη 1η:

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1 \cup (A_2A_1')) = N(A_1) + N(A_2A_1') \quad (1)$$

ξένα

Όμως,

$$N(A_2) = N(A_2A_1' \cup A_2A_1) = N(A_2A_1') + N(A_2A_1) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \quad N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1A_2)$$

Απόδειξη 2η:

Μέτρηση της συνεισφοράς των στοιχείων στα 2 μέλη της ισότητας.
Ακολουθώντας τη διαδικασία παρακάτω, για επιβεβαίωση και έλεγχο των αποτελεσμάτων, καταλήγουμε σε αντίστοιχο συμπέρασμα.

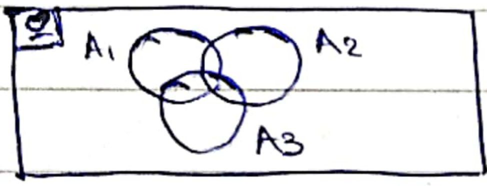
$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 A_2)$

$\omega \in A_1 A_2$	1	$1 + 1 - 1$ ✓
$\omega \in A_1 A_2'$	1	$1 + 0 - 0$ ✓
$\omega \in A_1' A_2$	1	$0 + 1 - 0$ ✓
$\omega \in A_1' A_2'$	0	$0 + 0 - 0$ ✓

Συνεπώς,

όντως ισχύει $N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$

② Αρχή Ε-Α για 3 σύνολα



παίρνω δλδ για 3 σύνολα το άθροισμα των πληθαρίθμων ανά 1.

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \underbrace{N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)}_{= S_{3,1}} - \underbrace{\left(N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)\right)}_{= S_{3,2}} + \underbrace{N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{= S_{3,3}}$$

Απόδειξη:

1ος τρόπος

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1 \cup A_1' A_2 \cup A_1' A_2' A_3) =$$

ξένα

$$= N(A_1) + N(A_1' A_2) + N(A_1' A_2' A_3) \quad (1).$$

Επίσης, $N(A_2) = N(A_1 A_2 \cup A_1' A_2) = N(A_1 A_2) + N(A_1' A_2) \Rightarrow$

$$N(A_1' A_2) = N(A_2) - N(A_1 A_2) \quad (2).$$

Τέλος, $N(A_3) = N((A_3 \cap (A_1 \cup A_2)') \cup (A_3 \cap (A_1 \cup A_2))) = \ldots (3)$

(1) & (2) & (3) $\Rightarrow$ Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού.

2ος τρόπος

	$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$	=	$S_{3,1}$	−	$S_{3,2}$	+	$S_{3,1}$	
$\omega \in 3$ συν	1	=	3	−	3	+	1	✓
$\omega \in 2$ συν	1	=	2	−	1	+	0	✓
$\omega \in 1$ συν	1	=	1	−	0	+	0	✓
$\omega \in 0$ συν	0	=	0	−	0	+	0	✓

③ Αρχή Ε-Α για ν σύνολα

$$N\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i}_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu}\Big) = S_{\nu,1} - S_{\nu,2} + S_{\nu,3} - S_{\nu,4} + \dots + (-1)^{\nu-1} S_{\nu,\nu} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}.$$

$S_{\nu,r}$ = Αθροισμα των πληθαρίθμων τομών από r σύνολα από τα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ =

$$= \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

$\binom{\nu}{r}$ όροι

Λη

2. Απόδειξη:

$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu) = S_{\nu,1} - S_{\nu,2} + S_{\nu,3} - \dots + (-1)^{\nu-1} S_{\nu,\nu}$

$\omega \in 0$ συν	0	$=$	$0 - 0 + 0 \quad 0$ ✓
$\omega \in 1$ συν	1	$=$	$1 - 0 + 0 \quad 0$ ✓
$\omega \in 2$ συν	1	$=$	$2 - 1 + 0 \quad 0$ ✓
$\vdots$			$\vdots$
$\omega \in r$ συν $(r \geq 1)$	1	$=$	$\underbrace{r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots (-1)^{r-1}\binom{r}{r}}_{\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\binom{r}{i}} \; 0 \dots 0$

όπου

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\binom{r}{i} = -\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{i} = -\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{i}}_{(1+(-1))^{r}} - 1\Big) = 1.$$

④ Πόρισμα

$$
\begin{aligned}
N(A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_\nu') &= N(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu)) = \\
&= N(\Omega) - N(A_1 \cup \dots \cup A_\nu) = \\
&= N(\Omega) - \sum_{r=1}^{\nu}(-1)^{r-1} S_{\nu,r} = \\
&= \underbrace{N(\Omega)}_{S_{\nu,0}} + \sum_{r=1}^{\nu}(-1)^{r} S_{\nu,r} = \\
&= \sum_{r=0}^{\nu}(-1)^{r} S_{\nu,r}
\end{aligned}
$$

→ ο Μάρτιος 2003 γενικώς είναι (πιο) εύκολη εξεταστική.

⑤ Άσκηση (Θέμα 3 | Μάρτιος 2003)

3 δοκιμασίες ενηλικίωσης A, B, Γ
ρ ι γ
κ Σ π.

A = Σύνολο επιτυχόντων στην δοκιμασία Αρκούδα

B = Σύνολο επιτυχόντων στην δοκιμασία Βύσσωνας.

Γ = Σύνολο επιτυχόντων στην δοκιμασία Γύπας

Από την εκφώνηση αντλούμε τα δεδομένα:

1) $N(B)=2N(A)$

2) $N(\Gamma)=3N(A)$

3) $N(AB)=N(A\Gamma)=N(B\Gamma)$

4) $N(A\cup B\cup \Gamma)=46$

5) $N(AB\Gamma)=1$.

6) $N(AB')=5$.

$N(A)=;$ $N(AB)=;$

Λύση:

$$46 \overset{(4)}{=} N(A\cup B\cup\Gamma) \overset{\text{Αρχή E-A}}{=}$$

$$= N(A)+N(B)+N(\Gamma)-N(A\cap B)-N(A\cap\Gamma)-N(B\cap\Gamma)+N(AB\Gamma) =$$

$$\underset{(3)}{\overset{(1),(2)}{=}} 6N(A)-3N(A\cap B)+1 \Rightarrow$$

$$\boxed{6N(A)-3N(AB)=45 \quad (1)}$$

$(6) \Rightarrow \boxed{N(A)-N(AB)=5}$ (2)

Λύνοντας το σύστημα (1) και (2), έχουμε

$\boxed{N(A)=10}$ και $\boxed{N(A\cap B)=5}$

→ "Αγαπημένη Άσκηση"

⑥ Άσκηση (Θέμα 3 | Σεπτ 2001)

100 φοιτητές εξετάστηκαν σε 3 θέματα.

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

✓ 100 γνωρίζουν τουλ. 1 θέμα

✓ 70 γνωρίζουν τουλ. 2 θέματα.

✓ 10 γνωρίζουν ακριβώς 3 θέματα (όλα).

✓ Αν κάθε θέμα το γνωρίζει ο ίδιος αριθμός φοιτητών, τότε #φοιτ. που $\boxed{\text{ΔΕΝ}}$ γνωρίζουν το Θ_1 = ;

Λύση:

A_i = Σύνολο φοιτητών που γνωρίζουν το Θ_i, $i=1,2,3$

$N(\Omega)=100$

$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=100$

$N(A_1A_2 \boxed{\cup} A_1A_3 \boxed{\cup} A_2A_3)=70$

$N(A_1A_2A_3)=10$.

$N(A_1)=N(A_2)=N(A_3)$

Δεδομένα.

$N(A_1')=;$ → ζητούμενο.

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

1^{os} τρόπος

$$100 = N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) -$$
$$- \left(N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) \right) +$$
$$+ N(A_1A_2A_3) =$$
$$= 3N(A_1) - \left(N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) \right) + 10 \Rightarrow$$

$$3N(A) - \left(N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) \right) = \underline{90} \ (1) \Rightarrow$$

$$70 = N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3) = N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) -$$
$$- N(A_1A_2A_1A_3) - N(A_1A_2A_2A_3) - N(A_1A_3A_2A_3) +$$
$$+ N(A_1A_2A_1A_3A_2A_3) \Rightarrow$$

$$70 = N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - 2\underbrace{N(A_1A_2A_3)}_{10} \Rightarrow$$

Άρα,

$N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) = 90 \ (2)$.

Από (1) & (2), έχουμε:

$\boxed{N(A_1) = 60}$ και $N(A_1') = N(\Omega) - N(A_1) = 40$.

2^{os} τρόπος

Ακριβώς 10 φοιτητές γνωρίζουν 3 θέματα.

Ακριβώς 60 φοιτητές γνωρίζουν 2 θέματα.

Ακριβώς 30 φοιτητές γνωρίζουν 1 θέμα.

Λυμένα θέματα $= 10 \cdot 3 + 60 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 180$

Άλυτα θέματα $= 300 - 180 = 120$.

#φοιτ. που $\boxed{\text{δεν}}$ γνωρίζουν το $\Theta_1 = \frac{120}{3} = 40$.

↳ ξέρουμε ότι καθένα από τα 3 θέματα το γνωρίζει ο ίδιος αριθμός φοιτητών $\Rightarrow N(A_1) = N(A_2) = N(A_3)$.

Άρα, θα ισχυεί το ίδιο για τις άλυτες $\Rightarrow N(A_1') = N(A_2') = N(A_3')$