21/11/2023

Αθροίσματα - Ασκήσεις

① Άσκηση

$$S = \sum_{s=k}^{\nu} \binom{s}{k}\binom{\nu}{s} = ;$$

Παρατηρώ αυτά. Η πρώτη σκέψη είναι να τα σπάσω, να τα διαγράψω και να ξαναγυρνάρω

Μ' αυτό η Cauchy θα δούλευε.

Λύση:

$$S = \sum_{s=k}^{\nu} \frac{\cancel{s!}}{k!\,(s-k)!}\cdot\frac{\nu!}{\cancel{s!}\,(\nu-s)!} =$$

$$= \frac{\nu!}{k!}\sum_{s=k}^{\nu}\frac{1}{(s-k)!\,(\nu-s)!}$$

$i = s-k$ Αλλαγή μεταβλητής

$$= \frac{\nu!}{k!}\sum_{i=0}^{\nu-k}\frac{1}{i!\,(\nu-k-i)!} =$$

$$= \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}\sum_{i=0}^{\nu-k}\frac{(\nu-k)!}{i!\,(\nu-k-i)!} =$$

$$= \binom{\nu}{k}\sum_{i=0}^{\nu-k}\binom{\nu-k}{i} = \boxed{\binom{\nu}{k}2^{\nu-k}}$$

↳ γτ είναι όλα τα υποσύνολα (το άθροισμά τους) με i στοιχεία ενός συνόλου με (ν-κ) στοιχεία.

② Άσκηση (Θέμα 2ο | Σεπτ 2012)

$$S = \sum_{k=0}^{\nu}(k+2)^2\binom{\nu}{k+1}2^k = ;$$

Λύση:

δε για $j=\nu+1$ έχουμε $\binom{\nu}{\nu+1}=0$ που μηδενίζει όλο το άθροισμα.

$$s \overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{\nu+1} (j+1)^2 \binom{\nu}{j} 2^{j-1} =$$

$j^2+2j+1 = j(j-1)+3j+1$ αναλύουμε σε καθοδικά παραγοντικά

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} j(j-1)\binom{\nu}{j}2^{j} + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{\nu} j\binom{\nu}{j}2^{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}\binom{\nu}{j}2^{j} =$$

δε για $j=1$ μηδενίζεται έτσι κι αλλιώς

$j^2+2j+1 = A_0(k)_0 + A_1(k)_1 + A_2(k)_2 = A_0 + A_1 k + A_2 k(k-1) =$

$j^2+2j+1 = A_2 j^2 + k(A_1-A_2) + A_0 \Rightarrow$ $\boxed{A_0=1}$ $\boxed{A_2=1}$ $\boxed{A_1=3}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{\nu} \cancel{j(j-1)}\, \frac{\nu(\nu-1)}{\cancel{j(j-1)}}\binom{\nu-2}{j-2}2^{j} + \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{\nu} \cancel{j}\, \frac{\nu}{\cancel{j}}\binom{\nu-1}{j-1}2^{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}\binom{\nu}{j}2^{j} =$$

$$\overset{i=j-2}{=} \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sum_{i=0}^{\nu-2}\binom{\nu-2}{i}2^{i+2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}4\sum_{i=0}^{\nu-2}\binom{\nu-2}{i}2^{i} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}4(2+1)^{\nu-2}$$

$$= \frac{\nu(\nu-1)}{2}4(2+1)^{\nu-2} + \frac{3\nu}{2}2(2+1)^{\nu-1} + \frac{1}{2}\left[(1+2)^{\nu}-1\right] =$$

$$= 2\nu(\nu-1)3^{\nu-2} + \nu 3^{\nu} + \frac{3^{\nu}}{2} - \frac{1}{2}$$

③ Άσκηση (Θέμα 2α | Μάρτιος 2012)

SOS!!

$$s = \sum_{k=0}^{\nu} k(\nu-k)\binom{9}{k}\binom{5}{\nu-k} = ;$$

Λύση: δε για $k=0$ και $k=\nu$ μηδενίζεται έτσι κι αλλιώς

$$s = \sum_{k=1}^{\nu-1} \cancel{k}\,\cancel{(\nu-k)}\, \frac{9}{\cancel{k}}\binom{8}{k-1}\frac{5}{\cancel{\nu-k}}\binom{4}{\nu-1-k} =$$

$$= 45\sum_{k=1}^{\nu-1}\binom{8}{k-1}\binom{4}{\nu-1-k}$$

$j=k-1$

(Άρα, $v-1-k=v-1-j-1=v-2-j$)

$$=45\sum_{j=0}^{v-2}\binom{8}{j}\binom{4}{v-2-j}\overset{Cauchy}{=}45\binom{12}{v-2}$$

Αρκετά δύσκολη!!

4) Άσκηση (Θέμα 2β | Μάρτιος 2012)

$$s=\sum_{j=0}^{v}\binom{2v}{\boxed{2j}}\underbrace{9^{j}}_{=3^{2j}}5^{2v-2j}$$

το Αυτό με πονηρεύει

Λύση:

$$s\overset{k=2j}{=}5^{2v}\sum_{\substack{k=0\\k\ \text{άρτιος}}}^{2v}\binom{2v}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}=S_{\alpha}$$

είναι το άθροισμα s αλλά σε άρτιους δείκτες

Ορίζω $S_{\pi}=5^{2v}\sum_{\substack{k=0\\k\ \text{περιττός}}}^{2v}\binom{2v}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}$.

είναι το άθροισμα s αλλά σε περιττούς δείκτες

Τότε, έχουμε:

υπάρχουν όλοι οι άρτιοι και όλοι οι περιττοί δείκτες

$$S_{\alpha}+S_{\pi}=5^{2v}\sum_{k=0}^{2v}\binom{2v}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}=5^{2v}\left(1+\frac{3}{5}\right)^{2v}=8^{2v}\quad (I)$$

και

$$S_{\alpha}-S_{\pi}=5^{2v}\sum_{k=0}^{2v}\binom{2v}{k}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k}=5^{2v}\left(1-\frac{3}{5}\right)^{2v}=2^{2v}\quad (II)$$

→ είναι ουσιαστικά $5^{2v}\sum_{k=0}^{2v}(-1)^{k}\binom{2v}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}$, $(-1)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{k}$

Λόγω οι άρτιοι εμφανίζονται με ⊕ ενώ οι περιττοί με ⊖. Άρα, είναι το άθροισμα όλων των όρων αλλά με εναλλαγή στα πρόσημα.

Άρα,

$$\boxed{S_{\alpha}=\frac{8^{2v}+2^{2v}}{2}}$$

← $\frac{(I)+(II)}{2}$

5) Άσκηση — Πολύ Δύσκολη!!

$$s = \sum_{k=0}^{v} \binom{2k}{k}\binom{2(v-k)}{v-k} = ;$$

Δεν πάει με Cauchy

Λύση:

Λήμμα: $\binom{2k}{k} = 2^{2k}(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$ → Δεν μας χρειάζεται ιδιαίτερα στο μάθημα.

Άρα,

$$\binom{2k}{k} = \frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)(2k-5)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{k!\,k!} =$$

$2k$, $2(k-1)$, $2(k-2)$, …, $2\cdot 2$, $2\cdot 1$

ο αριθμητής έχει εναλλάξ άρτιους και περιττούς

Βγάζω κοινό παράγοντα το 2 από όλους τους άρτιους

$$= \frac{2^k\, k!\, \overbrace{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}^{k \text{ το πλήθος}}}{k!\,k!} =$$

έβγαλα το 2 κοινό παράγοντα

$$= 2^{2k}\,\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)\left(k-\frac{7}{2}\right)\cdots \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{k!} \qquad \left(k-\tfrac{1}{2}\right)_k$$

$$= 2^{2k}\binom{k-\frac{1}{2}}{k} = 2^{2k}\binom{\frac{1}{2}+k-1}{k} = 2^{2k}(-1)^k\binom{-1/2}{k}$$

γιατί ξέρουμε ότι $\boxed{\left[{x \atop k}\right] = (-1)^k\binom{-x}{k} = \binom{x+k-1}{k}}$

Άρα,

$$s = \sum_{k=0}^{v} 2^{2k}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} 2^{2(v-k)}(-1)^{v-k}\binom{-\frac{1}{2}}{v-k} =$$

$$= 2^{2v}(-1)^v \sum_{k=0}^{v}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{v-k} =$$

$$= 2^{2v}(-1)^v\underbrace{\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{v}}_{\text{Cauchy}} = 2^{2v}(-1)^v\binom{-1}{v} = 2^{2v}\left[{1 \atop v}\right] =$$

$$= 2^{2v}\binom{v+1-1}{v} = 2^{2v}$$

Εύκολη! Πολύ καλή για εξετάσεις!

(6) Άσκηση (Θέμα 2β | Φεβρ 2011 – Ομάδα Α)

$$S = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}\left(\nu k + \binom{\nu}{k}\right) = ;$$

Λύση:

Σπάω το άθροισμα

$$S = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\nu k + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{\nu}{k} =$$

$$\binom{\nu}{k}=\binom{\nu}{\nu-k}$$

$$= \nu \sum_{k=1}^{\nu} k\,\frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{\nu}{\nu-k}$$

$i=k-1$

Cauchy

$$= \nu^2 \sum_{i=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i} + \binom{2\nu}{\nu} = \nu^2 2^{\nu-1} + \binom{2\nu}{\nu}$$

⊛ Μερικά παλιά θέματα είναι δύσκολα γιατί τότε το μάθημα το έπαιρναν φοιτητές μεγαλύτερων ετών.

(αρκετά) Πιο δύσκολη!

(7) Άσκηση (Θέμα 3α | Σεπτ 2010 – Ομάδα Β)

$$S = \sum_{j=m}^{\infty}\binom{j}{m}3^{m-j}$$

το να είναι η μεταβλητή της άθροισης πάνω δεν είναι βοηθητικό γενικώς.

Λύση:

$$\binom{\nu}{k}=\binom{\nu}{\nu-k}$$

$$S \overset{i=j-m}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+m}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+m}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{\binom{m+1+i-1}{i}}_{=\left[{m+1 \atop i}\right] = (-1)^i\binom{-m-1}{i}}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-m-1}{i}\left(-\frac{1}{3}\right)^i =$$

$$(1+t)^x = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} t^i, \ |t|<1.$$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-m-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}$$

8 Άσκηση (Θέμα 3β | Σεπτ2010 - Ομάδα Β)

$$s = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ περιττός}}}^{m} (2j+1)\binom{m}{j}3^j$$

Λύση:

Έστω $S_a = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ άρτιος}}}^{m} (2j+1)\binom{m}{j}3^j$ και S_π το ζητούμενο

$$S_a + S_\pi = \sum_{j=0}^{m} (2j+1)\binom{m}{j}3^j \quad (1)$$

$$S_a - S_\pi = \sum_{j=0}^{m} (2j+1)\binom{m}{j}3^j(-1)^j \quad (2)$$

ίδια λογική με την προηγούμενη άσκηση.

μονοσταγικά τα (1) και (2) είναι αυτό απλά για $t=3$ και $t=-3$ αντίστοιχα.

Έχω $\sum_{j=0}^{m} (2j+1)\binom{m}{j}t^j = \underbrace{2\sum_{j=0}^{m} j\binom{m}{j}t^j}_{2m\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}t^j \text{ και μετά αλλαγή μεταβλητής}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}t^j}_{(1+t)^m} =$

$$= 2mt(1+t)^{m-1} + (1+t)^m$$

Άρα, $S_a + S_\pi = 6m4^{m-1} + 4^m$ (για $t=3$) (Ι)

$S_a - S_\pi = -6m(-2)^{m-1} + (-2)^m$ (για $t=-3$) (ΙΙ)

Συνεπώς, $\frac{(I)-(II)}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{S_\pi = \frac{6m4^{m-1} + 4^m + 6m(-2)^{m-1} - (-2)^m}{2}}$$