24/10/2023

Στοιχεία Πιθανοτήτων:
Ασκήσεις σε διατάξεις και συνδυασμούς.

① Κλασική πιθανότητα:

Πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$: Δειγματικός χώρος. (το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων)

(*) Αν δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε ένα αποτέλεσμα πιο πιθανό από ένα άλλο.

Ενδεχόμενο = Υποσύνολο του Ω.

Πιθανότητα (κλασική): Δυναμοσύνολο του $\Omega \longrightarrow [0,1]$

$$A \longmapsto P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

ευνοϊκές

πιθανότητα του A.

δυνατές

② Παράδειγμα:

Πείραμα τύχης: Ρίψη ζαριού.

Δειγματικός χώρος = $\{1,2,3,4,5,6\}$.

$$\text{Πιθανά Ενδεχόμενα} = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}.$$

A = "άρτια ζάρια" = $\{2,4,6\}$.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

SOS!!

③ Άσκηση → Έχει πέσει!!

ν ανδρόγυνα: $(A_1, \Gamma_1), (A_2, \Gamma_2), \ldots, (A_\nu, \Gamma_\nu)$.

κ-μελών συμβουλίων στις παρακάτω περιπτώσεις από αυτά τα 2ν άτομα.

(i) Χωρίς περιορισμό.

(ii) Με πρόεδρο

(iii) Με πρόεδρο γυναίκα.

(iv) Με πρόεδρο γυναίκα και γραμματέα άντρα.

(v) Με ακριβώς r γυναίκες.

(vi) Με ακριβώς r γυναίκες και χωρίς άτομα από το ίδιο ζευγάρι.

(vii) Χωρίς άτομα από το ίδιο ζευγάρι.

Λύση:

(i) $\binom{2\nu}{\kappa}$

(ii) Ο σχηματισμός του συμβουλίου γίνεται σε 2 στάδια:

1ο) Επιλογή προέδρου → 2ν τρόποι.

2ο) Επιλογή υπολοίπων → $\binom{2\nu-1}{\kappa-1}$ τρόποι.

Από πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε

$$2\nu \binom{2\nu-1}{\kappa-1} \text{ συμβούλια.}$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τα μέλη του συμβουλίου με $\binom{2\nu}{\kappa}$ τρόπους και από

αυτά τα άτομα να επιλέξω πρόεδρο με κ τρόπους.
Απο πολλαπλασιαστική αρχή, $\binom{2\nu}{k}k$ συμβούλια.

$$2\nu\binom{2\nu-1}{k-1} = 2\nu\frac{(2\nu-1)!}{(k-1)!\,(2\nu-k)!} = \frac{(2\nu)!}{(k-1)!\,(2\nu-k)!} =$$

$$= k\cdot\frac{(2\nu)!}{k!\,(2\nu-k)!} = k\binom{2\nu}{k}$$

Βγαίνει το ίδιο με κάθε τρόπο

(iii) $\nu\cdot\binom{2\nu-1}{k-1}$ (με πολ/στική αρχή)

επιλογή γυν. προέδρου — επιλ. υπόλοιπων.

(iv) $\nu\cdot\nu\cdot\binom{2\nu-2}{k-2}$ (με πολ/στική αρχή)

επιλογή γυν. προέδρ. — επιλ. υπόλοιπων.

(v) $\binom{\nu}{r}\binom{\nu}{k-r}$ (με πολ/στική αρχή)

Από ν-γυναίκες — Από ν-άνδρες

επιλογή γυναικ. — κ-μελές συμβούλιο — επιλογή ανδρών.

(vi) $\binom{\nu}{r}\binom{\nu-r}{k-r}$

Από ν-γυναίκες

επιλέγω άντρες από (ν-r) άτομα γε όσοι είναι με τις r γυναίκες που βγήκαν ήδη αποκλείονται από το συμβούλιο

επιλογή γυναικών. — κ-μελές συμβ. — επιλογή αντρών.

(vii) $1^{\text{ος}}$ τρόπος:

Ένα τέτοιο συμβούλιο γίνεται σε στάδια.

$1^{ο}$) Επιλογή των k $\longrightarrow$ $\binom{v}{k}$ τρόποι.
ζευγαριών που θα "εκπροσωπηθούν"

$2^{ο}$) Επιλογή Α ή Γ από το $1^{ο}$ ζευγ. $\longrightarrow$ 2 τρόποι

⋮

$(k+1)^{ο}$) Επιλογή Α ή Γ από το $k^{ο}$ ζευγ. $\longrightarrow$ 2 τρόποι.

$\#$ συμβουλίων $= \binom{v}{k} 2^k$.

πχ $v=5$, $k=3$

(A_1,Γ_1), (A_2,Γ_2), (A_3,Γ_3), (A_4,Γ_4), (A_5,Γ_5) $\longrightarrow$ (A_1,Γ_1), (A_4,Γ_4), (A_5,Γ_5) $\longrightarrow$ A_1, (A_4,Γ_4), (A_5,Γ_5) $\longrightarrow$ A_1, Γ_4, (A_5,Γ_5) $\longrightarrow$ A_1, Γ_4, Γ_5

$2^{\text{ος}}$ τρόπος:

$\#$ συμβουλίων με k-άτομα χωρίς άτομα από το ίδιο ζευγάρι.

$=$

$$= \sum_{r=0}^{k} \# \text{ συμβ. με } k \text{ άτομα, εκ των οποίων } r \text{ γυναίκες και χωρίς άτομα του ίδιου ζευγαριού} =$$

$$\overset{(vi)}{=} \sum_{r=0}^{k} \binom{v}{r}\binom{v-r}{k-r} = \sum_{r=0}^{k} \frac{(v!)}{\cancel{(v-r)!}\cdot r!} \cdot \frac{\cancel{(v-r)!}}{(k-r)!\,(v-k)!} =$$

$$= \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} \sum_{r=0}^{\kappa} \frac{1}{r!\,(\kappa-r)!} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} \cdot \sum_{r=0}^{\kappa} \frac{\kappa!}{r!\,(\kappa-r)!} =$$

$$= \binom{\nu}{\kappa} \cdot \sum_{r=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{r} = \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}.$$

3ος τρόπος

Ένα συμβούλιο τέτοιου τύπου γίνεται σε στάδια.

1ο) Επιλ. ατόμου 1 $\longrightarrow$ 2ν τρόποι.

2ο) Επιλ. ατόμου 2 $\longrightarrow$ $2\nu-2$ τρόποι.

⋮

κο) Επιλ. ατόμου κ $\longrightarrow$ $2\nu-2(\kappa-1)$ τρόποι.

Άρα, $\#\,\substack{\text{διατετ.}\\ \text{συμβ}} = 2\nu(2\nu-2)(2\nu-4)\cdot\ldots\cdot(2\nu-2(\kappa-1))$ (πολλαπλασιαστική αρχή)

$\#\,\substack{\text{διατεταγμένων}\\ \text{συμβ.}} = \#\,\text{συμβ}\ \kappa! \Rightarrow$

$$\#\,\text{συμβ} = \frac{\#\,\substack{\text{διατετ.}\\ \text{συμβ}}}{\kappa!} =$$

$$= \frac{2\nu(2\nu-2)(2\nu-4)\cdot\ldots\cdot(2\nu-2(\kappa-1))}{\kappa!} = \frac{\nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-\kappa+1)}{\kappa!} 2^{\kappa}$$

$$= \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} 2^{\kappa} = \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}$$

(*) Η ίδια άσκηση θα μπορούσε να δοθεί με όρους πιθανοτήτων στην εκφώνηση.

Έχουμε ν ζευγάρια κ-δηλ επιλέγω τυχαία κ άτομα.

πχ1 $P\left(\exists \text{ ακριβώς } r \text{ ζευγ.}\right) = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} =$

$$= \frac{\binom{\nu}{r}\binom{\nu}{k-r}}{\binom{2\nu}{k}}$$

πχ2

$$P\left(\begin{matrix}\text{δεν υπάρχουν}\\ \text{άτομα από το ίδιο ζευγ}\end{matrix}\right) = \frac{\binom{\nu}{k}\cdot 2^k}{\binom{2\nu}{k}}$$

⑤ **Άσκηση. (το πρόβλημα των γενεθλίων)**

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ατόμων n ώστε με πιθανότητα $> \frac{1}{2}$ να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα με ίδια ημερομηνία γενεθλίων

(❗ Υποθέτουμε ότι όλα τα έτη έχουν 365 μέρες ($\nexists$ δίσεκτα))

Λύση: Έστω ότι έχουμε n άτομα.

$$P\left(\begin{matrix}\text{τουλάχ. 2}\\ \text{έχουν γενέθλ.}\\ \text{την ίδια ημερομ.}\end{matrix}\right) = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{όλοι έχουν}\\ \text{γενέθλια}\\ \text{σε διαφορ. μέρες}\end{matrix}\right) =$$

Έχουμε,

$$= 1 - \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n} =$$

$$= 1 - \frac{(365)_n}{365^n} = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!} = P_n.$$

Θέλω το ελάχιστο n τω $P_n > \frac{1}{2}$.

n	P_n
2	1/365
⋮	
20	0,411
⋮	
→ $\boxed{23}$	0,507 $> \frac{1}{2}$
50	0,970 → 97% πιθανότητα

(6) Άσκηση (Θέμα 1 Σεπτέμβριος 2012)

\# τοποθετήσεων σε σειρά των 1, 2, ..., 10 στις οποίες περιπτώσεις

(α) το 3 να βρίσκεται πριν το 5.

(β) το 3 να βρίσκεται πριν το 5 και το 5 πριν το 7.

(γ) το 3 και το 5 να βρίσκονται πριν το 7.

(δ) οι πρώτες 5 θέσεις να έχουν περιττούς.

Λύση:

(α) $\#$ τοποθ. με 3 πριν 5 $= \sum_{r=2}^{10}$ # τοποθ. με 3 πριν 5 με το 5 στην r θέση =

→ 1ος τρόπος

→ Προσθετική
(+) πολλαπλασιαστική
αρχή.

r θέση

|_|3|_|5|_|_|_|_|_|_|

$$= \sum_{r=2}^{10} 1\cdot(r-1)\cdot 8! = 8!\,(1+2+\dots+9) = 8!\,\frac{9\cdot 10}{2} = \frac{10!}{2}$$

τοπ. του 5 — τοπ. του 3 — τοπ. των υπολ.

2ος τρόπος (συμμετρία)

Μεταθέσεις με 3 πριν το 5 $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ Μεταθέσεις το 5 πριν το 3.

Άρα, $\#$ μεταθ. με 3 πριν το 5 $= \dfrac{\#\text{μεταθ.}}{2} = \dfrac{10!}{2}$.

3ος τρόπος (πολλαπλασιαστική Αρχή)

1ο Στάδιο: Επιλ. θέσεων για 3, 5 $\to \binom{10}{2}$ τρόποι,

2ο Στάδιο: Τοποθέτηση των υπόλοιπων $\to 8!$ τρόποι

Από πολλαπλασιαστική Αρχή,

$$\binom{10}{2}\cdot 8! = \frac{10!}{2!\,\cancel{8!}}\,\cancel{8!} = \frac{10!}{2!}$$