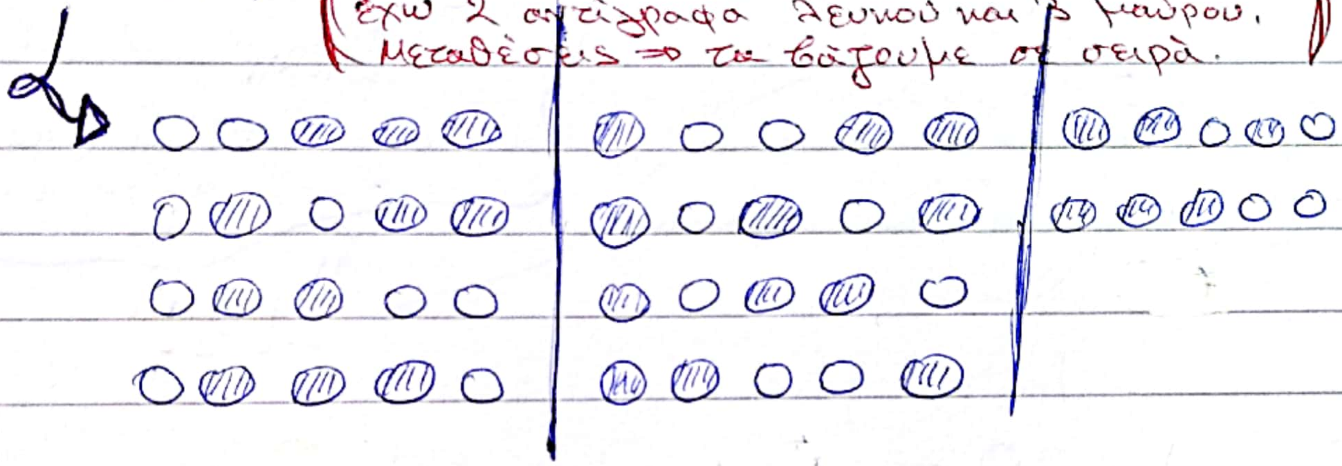
12/10/2023

Μεταθέσεις s ειδών στοιχείων

Κατανομές σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά

① Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν 2 ○ και 3 ● σε σειρά; (2 είδη στοιχείων, άσπρο μπαλάκι και μαύρο, έχω 2 αντίγραφα λευκού και 3 μαύρου. Μεταθέσεις ⇒ τα βάζουμε σε σειρά.)



Συνολικά: **10** μεταθέσεις πιθανές

② Ορισμός

Έστω $\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$. Μια μετάθεση των s ειδών στοιχείων του $\underline{\Omega}$, όπου το στοιχείο ω_i εμφανίζεται κ_i φορές, είναι μια διατεταγμένη $(\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_s)$-άδα στοιχείων του $\underline{\Omega}$ που το ω_i εμφανίζεται κ_i φορές.

↳ Στην πραγματικότητα, αυτό είναι μια διάταξη με επανάληψη. Ο περιορισμός εδώ είναι ότι το ω_i εμφανίζεται ακριβώς *τόσες* φορές. Άρα, οι μεταθέσεις n ειδών στοιχείων είναι ουσιαστικά μια ειδική περίπτωση διατάξεων με επανάληψη στοιχείων του $\underline{\Omega}$.

③ Παράδειγμα (Συνέχεια)

Ιδέα: Κάθε σφαιρίδιο έχει νούμερο.

Τότε, από τη μετάθεση 2 ειδών,

○ ○ ● ● ● → ① ② ③ ④ ⑤

① ② ③ ⑤ ④

① ② ④ ③ ⑤

① ② ④ ⑤ ③

⋮

κλπ.

Μετά αρχίζω με το ② ① ... το ίδιο.

> Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε περίπτωση,
> πχ. ● ○ ● ● ○

1ο βήμα | βάζω τα λευκά σε σειρά

2ο βήμα | βάζω τα μαύρα σε σειρά.

$$\| \quad 2!\cdot 3!$$

Από κάθε μετάθεση των 2 ○ και 3 ●, παίρνω 2!3! μεταθέσεις στοιχείων του $\{1,2,3,4,5\}$.

* Άρα, το πλήθος των μεταθέσεων 2 ○ και 3 ● πολλαπλασιασμένο με $(2!\cdot 3!)$ είναι ίσο με $5!$

$$\left(\begin{matrix}\#\text{μεταθέσεων}\\ 2\,○ \text{ και } 3\,●\end{matrix}\right)\cdot(2!\,3!) = 5!$$

τόσες μεταθέσεις 5 στοιχείων.

δηλ.

$$\begin{matrix}\#\text{μεταθέσεων}\\ 2\,○ \text{ και } 3\,●\end{matrix} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot4\cdot\cancel{3\cdot2\cdot1}}{2\cdot1\cdot\cancel{3\cdot2\cdot1}} = 10.$$

Τέτοιες αποδείξεις δεν πέφτουν στο τέλος, είναι μόνο για να καταλαβαίνουμε τι γίνεται;

④ Τύπος (γενίκευση) για # μεταθέσεων s ειδών στοιχείων.

$$\left(\begin{array}{l}\#\text{ μεταθέσεων } s \text{ ειδών}\\ \text{στοιχείων που το στοι-}\\ \text{χείο } \omega_i \text{ εμφανίζεται}\\ \text{ακριβώς } k_i \text{ φορές για}\\ i=1,2,\dots,s\end{array}\right) = \frac{(k_1+k_2+k_3+\dots+k_s)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\dots k_s!}$$

Σε έχω k_1 του πρώτου είδους, k_2 του $2^{ου}$, κλπ.
(k_1 άσπρες μπάλες, k_2 μαύρες)

Απόδειξη:

Από μια μετάθεση όπου το ω_i εμφανίζεται k_i φορές, παίρνω $k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_s!$ $\boxed{\text{συνήθεις}}$ μεταθέσεις του

$\{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \dots, \omega_{1,k_1}, \omega_{2,1}, \omega_{2,2}, \dots, \omega_{2,k_2}, \dots, \omega_{s,1}, \dots, \omega_{s,k_s}\}$

γς, στην πίσω μεριά της, η μπάλα έχει κάποιο νούμερο

Άρα,

$$\left(\begin{array}{l}\#\text{ μεταθέσεων } s \text{ ειδών}\\ \text{στοιχείων με}\\ \omega_i \to k \text{ φορές}\end{array}\right)\cdot k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_s! = \left(\begin{array}{c}\#\text{ μεταθ.}\\ \text{του}\\ \{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \dots, \omega_{s,k_s}\}\end{array}\right) = (k_1+k_2+\dots+k_s)!$$

Εναλλακτική Απόδειξη:

Για να βάλω τα k_1 "ω_1", k_2 "ω_2", ..., k_s "ω_s" σε σειρά, κάνω s στάδια:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \ldots\ \_}_{k_1+k_2+\dots+k_s \text{ θέσεις}}$$

1ο στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα ω_1 →

πχ: για το προηγούμενο παράδειγμα

1ο 3ο

$\underbrace{|\;|\;|\;|\;|\;|}_{5}$ ○ ○ $\boxed{\binom{5}{2}}$ → από τα 5 κελιά διαλέγω 2 για να βάλω τις 2 άσπρες μπάλες. Είναι συνδυασμοί και όχι διατάξεις, γτ αν

(1) (1) (1) $\binom{3}{3}=1$

διαλέξω την 1η μπάλα και τη βάλω στο 1ο κελί και τη 2η στο 2ο, είναι το ίδιο πράγμα με το να βάλω την 1η στο 2ο και τη 2η στο 1ο (δεν έχει σημασία η διάταξη).

$\underbrace{|\;|\;|\;|\;\ldots\;|\;|}_{k_1+k_2+\ldots k_s \text{ θέσεις.}}$

$\omega_1\ \omega_1\ \omega_1 \to \#k_1$

$\omega_2\ \omega_2\ \omega_2 \to \#k_2$

$\omega_3\ \omega_3\ \omega_3 \to \#k_3$

1ο στάδιο: επιλογή θέσεων για τα ω_1 → $\binom{k_1+k_2+\ldots+k_s}{k_1}$ τρόποι.

2ο στάδιο: επιλογή θέσεως για τα ω_2 → $\binom{k_2+\ldots+k_s}{k_2}$ γτ ... k_1 θέσεις ήδη καλύφθηκαν στο προηγούμενο βήμα

3ο στάδιο: επιλογή θέσεως για τα ω_3 → $\binom{k_3+\ldots+k_s}{k_3}$

⋮

sο στάδιο: επιλογή θέσεως για τα ω_s → $\binom{k_s}{k_s}=1$

Άρα, από πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\#\text{μεταθ. } s \text{ ειδών με } \omega_i \to i \text{ φορές} = \underbrace{\binom{k_1+k_2+\ldots+k_s}{k_1}}_{\text{επιλογή θέσεων για } \omega_1} \cdot \underbrace{\binom{k_2+k_3+\ldots+k_s}{k_2}}_{\text{επιλογή θέσεων για τα } \omega_2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\binom{k_s}{k_s}}_{\text{επιλογή θέσεων για τα } \omega_s}$$

$$\#\,\substack{\text{μεταθ. s ειδών}\\ \text{με } \omega_i\text{-τοι φορές}} = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_s)!}{k_1!\,\cancel{(k_2+k_3+\ldots+k_s)!}} \cdot \frac{\cancel{(k_2+k_3+\ldots+k_s)!}}{k_2!\,\cancel{(k_3+k_4+\ldots+k_s)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{k_s!}}{k_s!\cdot \underbrace{0!}_{=1}}$$

5 Παράδειγμα

αναγραμματισμών (πιθανά χωρίς νόημα) της λέξης "ΑΛΛΕΠΑΛΛΗΛΕΣ" = Μεταθέσεις των

Α	Λ	Ε	Π	Σ	Η
2	5	2	1	1	1

Άρα,

$$\#\ldots = \frac{(2+5+2+1+1+1)!}{2!\,5!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \frac{12!}{4\cdot 5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot 6}{\cancel{4}} \rightarrow$$

$$\#\ldots = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 2.$$

(διαφορετικά)

6 Κατανομές Σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά

Πρόβλημα:

Έχουμε k σφαιρίδια (διακεκριμένα / όμοια)

Έχουμε ν διακεκριμένα κελιά (μοναδιαίας χωρητικ. / άπειρης).

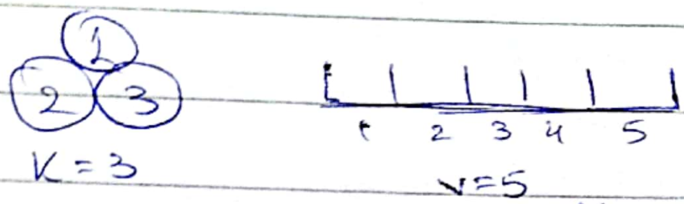
κατανομών = ;

κελιά

σφαιρίδια	Χωρητ. 1	Χωρητ. Άπειρη	
Διακεκριμένα	$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$	ν^k	Διατάξεις.
Όμοια.	$\binom{\nu}{k}$	$\binom{\nu+k-1}{k} = \boxed{\begin{matrix}\nu\\k\end{matrix}}$	Συνδυασμοί.
	χωρίς επανάληψη	με επανάληψη	

Άρα διατάξεις

Περίπτωση 1η: Διακεκριμένα Σφαιρίδια με Κελιά χωρητικότητας 1 → άρα χωρίς επανάληψη.



Ο 1ος τρόπος είναι να το πάρε με βήματα, πολλαπλασιαστική αρχή κλπ.
Ο 2ος τρόπος είναι να κάνουμε σύνδεση με διατάξεις.

κελί σφ.1 — κελί σφ.2 — κελί σφ.3

| |3|1| |2| ⟷ (3, 5, 2)

|1|2|3| | | ⟷ (1, 2, 3)

| |1|2| |3| ⟷ (2, 3, 5)

⋮

κλπ.

⋮

|3|2| | |1| ⟷ (5, 2, 1)

⋮

κλπ.

Οι κατανομές κ διακεκριμένων σφαιριδίων σε ν-διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1

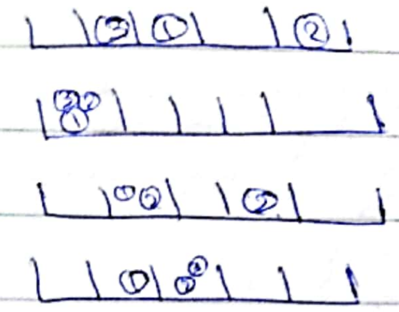
↕ αντιστοιχεί 1-1

Διατάξεις ν ανά κ χωρίς επανάληψη.

→ Παίρνω 3 αριθμούς από το {1,2,3,4,5}, αυτούς του 3 που εκφράζουν το σε ποια κελιά μπαίνουν τα αντίστοιχα μπαλάκια, και τους διατάσσω.

Περίπτωση 2η

Αν τα κελιά είναι άπειρης χωρητικότητας και τα μπαλάκια διακεκριμένα, έχουμε:



$\longleftrightarrow (3,5,2)$

$\longleftrightarrow (1,1,1)$

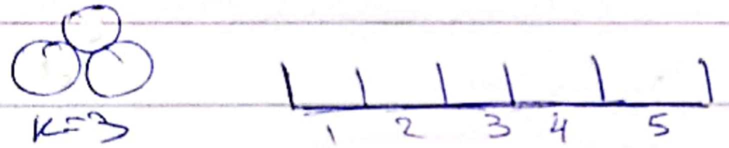
$\longleftrightarrow (2,4,2)$

$\longleftrightarrow (2,3,3)$

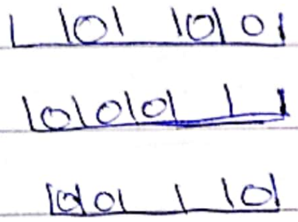
Άρα, ν^{k}.

Επειδή τα σφαιρίδια είναι είναι διακεκριμένα έχει σημασία ποιο θα πάει πού.

Περίπτωση 3η: Όμοια σφαιρίδια / κελιά χωρητικότητας 1.



$\nu = 5$



$\longleftrightarrow \{2,4,5\}$

$\longleftrightarrow \{1,2,3\}$

$\longleftrightarrow \{5,2,1\}$

Περιγράφω ποια κελιά είναι κατειλημμένα. Δεν έχει σημασία με ποια σειρά τα γράφω.

Οι κατανομές k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1

$\updownarrow$ 1-1 αντιστ.

Συνδυασμοί ν ανά k χωρίς επανάληψη.

Περίπτωση 4: Όμοια σφαιρίδια / κελιά άπειρης χωρ/τας

δεν (∄) υπάρχει διάταξη
δε τα σφαιρίδια είναι όμοια
Γράφω ποια κελιά έχουν καταληφθεί από σφαιρίδια.
Παίζει και επανάληψη εδώ.

| |o| |o|o| ⟷ $\{2,4,5\}$

| |oo| |o| | ⟷ $\{2,2,4\}$

| | | | |ooo| ⟷ $\{5,5,5\}$

| | |oo|o| | ⟷ $\{3,4,3\}$

Οι κατανομές κ όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞.

⟷ 1-1 αντιστοιχία

Συνδυασμοί ν ανά κ με επανάληψη.

⑦ Πλήθος συνδυασμών ν ανά κ με επανάληψη

Θεώρημα:

$$\#\text{ συνδ. } \nu \text{ ανά } \kappa \text{ με επαν.} := \begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa!\,(\nu-1)!}$$

~~π.χ.~~ $\kappa=3$, $\nu=5$

$\{2,3,3\}$ ⟷ | |o|oo| | | ⟷ 11010011

Συνδ. 5 ανά 3 με επαναλ.

Κατανομή 3 όμοιων σφαιρ. σε 5 διακ. κελιά άπειρης χωρητ.

Ακολουθία από 6 "1" και 3 "0"

Έχουμε 3 "0" γιατί έχουμε 3 σφαιρίδια και 6 "1" γιατί έχουμε 5 κελιά. Η ακολουθία <u>ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ</u> αρχίζει και τελειώνει με "1".

Για να αποφύγω αυτόν τον περιορισμό, μπορώ:

11010011 1 <—> 0101001010

Ακολουθίες 4 "1" και 3 "0".

Άρα,

$$\#\text{συνδ. 5 ανά 3 με επαν.} = \#\text{μεταθ. 4 "1" και 3 "0"} = \frac{(4+3)!}{4!\,3!}$$

Γενικά,

οι συνδυασμοί ν ανά κ με επανάληψη είναι σε μια 1-1 αντιστοιχία με μεταθέσεις 2 ειδών στοιχείων, (ν−1) "1" και κ "0". ⟹

$$\#\text{συνδ. ν ανά k με επαναλ.} = \#\text{μεταθ. ν−1 "1" και "0"} = \frac{(\nu-1+\kappa)!}{(\nu-1)!\,\kappa!} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$$

Π.χ.:

{1,1,5} <—> |0| 1 1 1 0| <—> 100111101 <—>

<—> 0011110 —> {1,1,5}.