3/10/2023

Συνδυαστική

1 Πεδίο:

Συνδυαστική: Απαρίθμηση συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Ερώτημα

- Με πόσους τρόπους μπορώ να...
- Πόσα αντικείμενα υπάρχουν με την ιδιότητα...

2 Εφαρμογή:

- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Ανάλυση Αλγορίθμων - Διακριτά Μαθηματικά.

3 Διδακτικά:

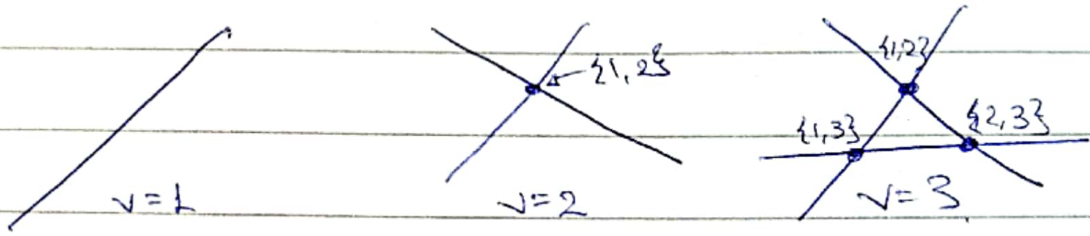
- Συγγράμματα: Κούτρα (πιο φιλικό)

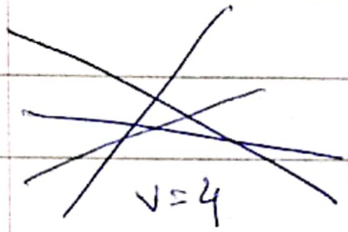
  Χαραλαμπίδη (πιο αυστηρό)

4 Ύλη:

- Απαρίθμηση Διατάξεων, Συνδυασμών.
- Αρχή Εγκλεισμού / Αποκλεισμού
- Γεννήτριες Συναρτήσεις
- Εφαρμογές στις Πιθανότητες

⑤ Ένα γεωμετρικό πρόβλημα:





ν ευθείες στο επίπεδο σε γενική θέση
(ανά 2 τεμνόμενες, ανά 3 όχι συντρέχουσες)

• Ερωτήματα:

1) Πόσα σημεία τομής ορίζουν $= a_\nu = ;$

2) Πόσα (απλά) ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν $= b_\nu = ;$

3) Πόσα χωρία ορίζουν $= \gamma_\nu = ;$

Λύση:

1)

1ος τρόπος (επαγωγικός)

$a_1 = 0$

$a_\nu = \underbrace{a_{\nu-1}}_{\text{το πλήθος των σημείων τομής των προηγούμενων μεταξύ τους}} + (\nu-1), \quad \nu \geq 1$

σημεία που προσθέτει η ν-οστή ευθεία που τέμνει τις προηγούμενες

Έχω

$$a_\nu = (\nu-1) + a_{\nu-1} = (\nu-1) + (\nu-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$$

2ος τρόπος (άμεσος αντιστοιχία, πολ/στική αρχή)

Σημείο ≡ Μη-διατεταγμένο ζεύγος ευθειών.
διακεκριμένων (διαφορετικών)

Ένα διατεταγμένο ζεύγος ευθειών γίνεται σε 2 στάδια.

1º στάδιο Επιλογή 1ης ευθείας $\Rightarrow$ ν τρόποι.
2º στάδιο Επιλογή 2ης ευθείας $\Rightarrow$ $(\nu-1)$ τρόποι.

Άρα, από πολλαπλασιαστική αρχή έχω $\nu(\nu-1)$ διατεταγμένα ζεύγη διακεκριμένων ευθειών. Κάθε σημείο έχει διπλομετρηθεί, άρα το πλήθος των σημείων (#σημείων) είναι $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$

2) **1ος τρόπος** (επαγωγικός)

$b_1=0$
$b_2=0$
$b_3=3$
$b_4=8$

$$b_\nu = \underbrace{b_{\nu-1}}_{\text{τα παλιά}} + \underbrace{(\nu-1)}_{\text{τα απλά ευθ. τμήματα που δημιουργεί η ευθεία ν στις προηγούμενες}} + \underbrace{(\nu-2)}_{\text{απλά ευθύγραμμα τμήματα στην ευθεία } \nu-1}$$

Άρα, $\boxed{b_\nu = b_{\nu-1} + 2\nu - 3, \ \nu \geq 3}$

Εδώ έχουμε $b_\nu = (2\nu-3) + (2\nu-5) + b_{\nu-2} =$

$\nu(\nu-2)$

2ος τρόπος
Κάθε ευθεία τέμνεται από τις άλλες σε $(\nu-1)$ σημεία που δημιουργούν $(\nu-2)$ ευθύγραμμα τμήματα (απλά) και 2 ημιευθείες. Άρα, # ευθ. τμημ $= \nu(\nu-2)$

3| **1ος τρόπος** (επαγωγικός)

$\gamma_1 = 2$) 2

$\gamma_2 = 4$) 3

$\gamma_3 = 7$) 4

$\gamma_4 = 11$

$\gamma_\nu = \gamma_{\nu-1} + \nu$

→ Η ν-οστή ευθεία χωρίζει κάποια από τα προϋπάρχοντα χωρία σε 2 κομμάτια και ο αριθμός των χωρίων από τα οποία περνάει είναι ν όσα και τα κομμάτια στα οποία χωρίστηκε η ευθεία ν.

Άρα,

Ουσιαστικά κάνω

$\gamma_\nu = \nu + \gamma_{\nu-1} = \nu + (\nu-1) + \gamma_{\nu-2} =$
$= \nu + (\nu-1) + \ldots + 2 + \gamma_1$

$$\gamma_\nu = \nu + (\nu-1) + \ldots + 2 + \underbrace{\gamma_1}_{=2} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$\gamma_\nu = \frac{\nu^2 + \nu + 2}{2}.$$

6 **Μεταθέσεις ν στοιχείων**

Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω τους αριθμούς $1, 2, \ldots, \nu$ σε σειρά $= \Omega_\nu = ;$

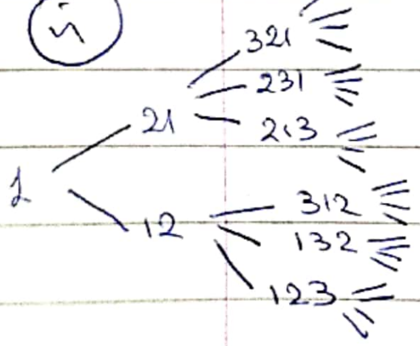
Λύση

$\nu = 1$: 1

$\nu = 2$: 21 ή 12

$\nu = 3$: 321 ή 231 ή 213 ή 312 ή 132 ή 123

ή



κλπ.

1ος τρόπος (επαγωγικός)

Από κάθε μετάθεση των (ν-1) αριθμών δημιουργούνται ν μεταθέσεις των ν αριθμών 1, 2, ..., ν, αφού ο ν τοποθετείται ή στην αρχή ή στο ενδιάμεσα ή στο τέλος. (ν θέσεις).

Άρα, $a_\nu = \nu \cdot a_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$.

$a_1 = 1$.

οπότε $a_\nu = \nu(\nu-1)\cdot \ldots \cdot 2 \overset{=1}{a_1} = \nu!$

2ος τρόπος (άμεσα) — πολλ/τική αρχή.

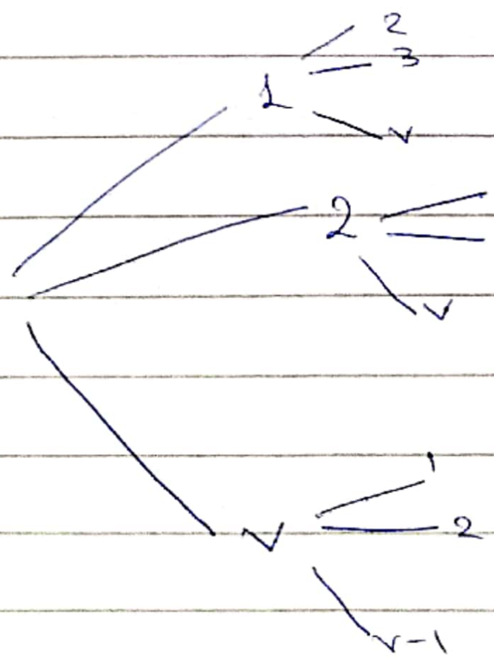
Μια μετάθεση γίνεται σε ν στάδια.

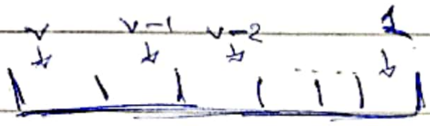
1ο στάδιο | Επιλογή αριθμού για 1η θέση ⇒ ν τρόποι.

2ο στάδιο | Επιλογή αριθμού για 2η θέση ⇒ (ν-1) τρόποι.

⋮

ν-ο στάδιο | Επιλογή αριθμού για νη θέση ⇒ 1 τρόπο.





Από πολλαπλασιαστική αρχή

$a_\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot \ldots \cdot 1 = \nu!$

7) Πλήθος Υποσυνόλων του $\{1,2,\ldots,\nu\}$

1ος τρόπος (Επαγωγικός)

$\nu=0$ $\quad$ $\nu=1$ $\quad$ $\nu=2$

$\emptyset$ $\quad$ $\emptyset$ $\quad$ $\emptyset$ $\{1\}$

$\{1\}$ $\quad$ $\{2\}$, $\{1,2\}$.

$a_0=1$.

$a_\nu=2a_{\nu-1}$, $\nu\geq 1$.

Από κάθε υποσύνολο A του $\{1,2,\ldots,\nu-1\}$ παίρνω 2 υποσύνολα του $\{1,2,\ldots,\nu\}$: A, $A\cup\{\nu\}$.

Τελικά, $a_\nu=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{\nu}\underset{1}{a_0}=2^\nu$.

2ος τρόπος (πολ/στική αρχή)

Για τη δημιουργία ενός υποσυνόλου χρειάζονται ν στάδια:

1ο Να βάλω ή όχι το 1 $\Rightarrow$ 2 τρόποι

2ο Να βάλω ή όχι το 2 $\Rightarrow$ 2 τρόποι

⋮

νο Να βάλω ή όχι το ν $\Rightarrow$ 2 τρόποι.

Άρα, $a_\nu=2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2=2^\nu$.