



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αλγοριθμικές Τεχνικές στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες:  
Πινακοαναλυτικές Μέθοδοι και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΕΛΛΑΣ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑ

Για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
με κατεύθυνση Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

ΑΘΗΝΑ

2006



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε στις ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

<b>Όνοματεπώνυμο</b>	<b>Βαθμίδα</b>	<b>Υπογραφή</b>
Μπουρνέτας Απόστολος	Αναπληρωτής Καθηγητής	.....
Οικονόμου Αντώνης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής	.....
Φακίνος Δημήτριος	Αναπληρωτής Καθηγητής	.....



Ευχαριστώ:

- τον Επίκουρο Καθηγητή Οικονόμου Αντώνη για την εμπιστοσύνη και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε τόσο κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας όσο και καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου
- τους Αναπληρωτές Καθηγητές Μπουρνέτα Απόστολο και Φακίνο Δημήτριο που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή









# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>11</b>
1.1	Ιστορική ανασκόπηση . . . . .	11
1.2	Σύντομη επισκόπηση των Μαρκοβιανών αλυσίδων . . . . .	15
1.3	Σκοπός και δομή της εργασίας . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Πιθανότητες κάτω από ένα σύνολο taboo</b>	<b>33</b>
2.1	Πιθανότητες taboo και υπολογισμοί . . . . .	33
2.2	Λογοκρμμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες . . . . .	48
2.3	Ο αλγόριθμος GTH . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Ομογενείς αλυσίδες τύπου QBD</b>	<b>59</b>
3.1	Ορισμοί και στάσιμη κατανομή QBD αλυσίδων . . . . .	60
3.2	Οι βασικοί πίνακες $G$ , $U$ και $R$ . . . . .	70
3.3	QBD αλυσίδες συνεχούς χρόνου . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Αλγοριθμικές τεχνικές για τον υπολογισμό του πίνακα <math>R</math></b>	<b>79</b>
4.1	Ένας βασικός αλγόριθμος . . . . .	80
4.2	Ακριβείς υπολογισμοί των πινάκων $G$ , $R$ σε ειδικές μορφές . . . . .	89
4.3	Η περίπτωση του συνεχούς χρόνου . . . . .	94
4.4	Άλλοι αλγόριθμοι υπολογισμού του πίνακα $R$ . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Εφαρμογές</b>	<b>97</b>
5.1	Ουρά με πολλούς υπηρέτες και χρόνους ενεργοποίησης . . . . .	97
5.2	Δίκτυο δυο σταθμών με κινούμενους υπηρέτες, παρεμπόδιση και απώλειες πελατών . . . . .	102



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Ιστορική ανασκόπηση

Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα στη θεωρία των Ουρών Αναμονής είναι η διαπίστωση ότι κάθε σύστημα το οποίο έχει επαρκή δυνατότητα εξυπηρέτησης όλου του έργου που περνάει από αυτό ( κατά μέσο όρο ) θα είναι ευσταθές. Η απόδειξη της ευστάθειας εξαρτάται κάθε φορά από τις υποθέσεις που ισχύουν στο εκάστοτε υπό μελέτη μοντέλο. Στα κλασικά Μαρκοβιανά μοντέλα η απόδειξη της ευστάθειας γίνεται ταυτόχρονα με την εύρεση της στάσιμης κατανομής. Για παράδειγμα μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου ή μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου είναι ευσταθής ( δηλαδή θετικά επαναληπτική ) αν και μόνο αν υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα πιθανότητας που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και την εξίσωση κανονικοποίησης και άρα αυτό είναι το μοναδικό στάσιμο διάνυσμα ( και περιέχει τις οριακές πιθανότητες όταν το σύστημα είναι απεριοδικό ). Στα πρώτα βήματα της θεωρίας πιθανοτήτων οι ερευνητές δεν έδιναν ιδιαίτερη σημασία στα αριθμητικά αποτελέσματα. Αυτό ήταν ιδιαίτερος αληθής στην περίπτωση των Ουρών Αναμονής. Ήταν συνήθης πρακτική να ολοκληρώνεται η ανάλυση ενός μοντέλου με τον τύπο που δίνει την πιθανογεννήτρια συνάρτηση ή τον μετασχηματισμό Laplace της υπό μελέτης τυχαίας μεταβλητής, όπως για παράδειγμα του μήκους ουράς ή του χρόνου αναμονής. Ένα σχόλιο του κατά πόσο ο μετασχηματισμός ήταν δυνατόν να αντιστραφεί με τις “γνωστές” τεχνικές μπορεί να υπήρχε στο τέλος του άρθρου, όμως σε πολλές περιπτώσεις δεν υπήρχε κανένα σχόλιο. Πολλοί θεωρούσαν δεδομένο ότι η λύση του προβλήματος ταυτιζόταν με την εύρεση του μετασχηματισμού. Χωρίς να θέλουμε να υποτιμήσουμε τη σημαντικότητα των αποτελεσμάτων αυτών, θα ήταν δίκαιο να αναφέρουμε ότι η “Laplacian κουρτίνα” ( βλέπε Neuts [ 8 - 19 ] ) έκρυβε ένα σημαντικό κομμάτι της θεωρίας και δεν επέτρεπε την εις βάθος κατανόηση της και, φυσικά, την εφαρμογή της.

Ένας από τους πιο σημαντικούς ερευνητές που ήρθε να δώσει λύση στο πρόβλημα αυτό είναι ο Marcel Neuts. Στο συνέδριο *Mathematical Methods in Queueing Theory* στο πανεπιστήμιο του Michigan το 1993 ο M. Neuts διατύπωσε τα θεμέλια της φιλοσοφίας του, όσον αφορά την αναγκαιότητα για Υπολογιστική Θεωρία Πιθανοτήτων. Ενδεχομένως το μεγαλύτερο επίτευγμα του M. Neuts να είναι η καθιέρωση της Υπολογιστικής Θεωρίας Πιθανοτήτων, κυρίως στις Ουρές Αναμονής, ως θέμα έρευνας και ως εργαλείο για πειραματισμό σε μοντέλα που δεν παρουσιάζουν αναλυτική λύση.

Μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της θεωρίας που εισήγαγε ο M. Neuts, πρότεινε δυο μοντέλα, τα οποία αποτελούν και το βασικό θέμα των μονογραφιών του. Το πρώτο επικεντρώνεται στις Ουρές Αναμονής με πινακική δομή παρόμοια με αυτή της  $GI/M/1$  ουράς. Στο δεύτερο βιβλίο ασχολείται με Ουρές Αναμονής με πινακική δομή παρόμοια με αυτή της  $M/G/1$  ουράς. Η βασική ιδέα και στα δύο βιβλία - όπως εξάλλου και στις περισσότερες δημοσιεύσεις του - είναι η μέθοδος των φάσεων, ότι δηλαδή αναλύουμε θετικές μη εκθετικές τυχαίες μεταβλητές σε άθροισμα μίξεων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Η ιδέα - που ξεκίνησε από τον Erlang και αναπτύχθηκε ιδιαίτερα από τον Cox - γίνεται καλύτερα κατανοητή δίνοντας μια φυσική ερμηνεία.

Έστω ένα σύστημα στο οποίο μια εργασία για να ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση της θα πρέπει να περάσει από διάφορους κόμβους πεπερασμένου πλήθους. Ο κόμβος από τον οποίο ξεκινάει καθορίζεται σύμφωνα με μια συνάρτηση πιθανότητας. Σε κάθε κόμβο παραμένει έναν εκθετικό χρόνο, η παράμετρος του οποίου μπορεί να εξαρτάται από τον εκάστοτε κόμβο. Στη συνέχεια είτε ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση και αναχωρεί από το σύστημα, είτε μεταβαίνει σε κάποιο άλλο κόμβο και συνεχίζει την εξυπηρέτηση. Ο επόμενος κόμβος επιλέγεται σύμφωνα με έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Η δομή αυτού του μοντέλου είναι αρκετά παρόμοια με αυτή των δικτύων Jackson, με έναν υπηρέτη σε κάθε ουρά, με τη σημαντική διαφοροποίηση ότι μόνο μια εργασία μπορεί να βρίσκεται στο σύστημα κάθε χρονική στιγμή. Ο κάθε κόμβος καλείται φάση και τότε ο συνολικός χρόνος που περνάει μια εργασία στο δίκτυο ακολουθεί κατανομή τύπου φάσεων (Phase-type distribution), που στο εξής θα αναφέρεται ως PH κατανομή. Οι διάφορες φάσεις μπορεί να αντιστοιχούν σε διαφορετικές εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν ως μέρος της συνολικής εξυπηρέτησης ή σε επαναλήψεις της ίδιας εξυπηρέτησης όταν η εργασία δεν έχει σωστά ολοκληρωθεί την πρώτη φορά. Είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι η παραπάνω φυσική ερμηνεία δεν αντιστοιχεί κατ'ανάγκη σε κάποιο πραγματικό σύστημα, αλλά αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη.

Οι ΡΗ κατανομές περιλαμβάνουν ως ειδικές περιπτώσεις την  $Erlang(k, \mu)$  κατανομή, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η κατανομή του αθροίσματος  $k$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Εκθετική( $\mu$ ) κατανομή (σειριακό δίκτυο) και την Υπερεκθετική κατανομή, η οποία μπορεί να μοντελοποιηθεί ως το δίκτυο εκείνο στο οποίο μια εργασία κατά την είσοδό της επιλέγει τυχαία κάποιο κόμβο εξυπηρέτησης, οι κόμβοι έχουν εκθετικούς χρόνους και είναι τοποθετημένοι παράλληλα, και μόλις ολοκληρωθεί η επιλεγθείσα εξυπηρέτηση η εργασία εγκαταλείπει το δίκτυο.

Η κατανομή κάθε μη-αρνητικής τυχαίας μεταβλητής μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε κοντά από μια ΡΗ κατανομή. Για να εφαρμοστεί αυτή η ιδέα είναι σημαντικό να βρεθεί μια προσέγγιση με όσο το δυνατόν μικρότερο πλήθος φάσεων, μιας και η μελέτη του μοντέλου που προκύπτει θα έχει αυξανόμενο δείκτη δυσκολίας ανάλογα με το πλήθος των φάσεων. Μεγάλο μέρος των μελετών που γίνονται τα τελευταία χρόνια σχετίζεται με αυτό το θέμα.

Η προσέγγιση μη-εκθετικών κατανομών από ΡΗ κατανομές επιτρέπει τη μοντελοποίηση μη Μαρκοβιανών συστημάτων (κατά προσέγγιση) με Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου, στις οποίες ο χώρος καταστάσεων τροποποιείται κατάλληλα, έτσι ώστε να περιλαμβάνει πληροφορία για τις διάφορες φάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί η εργασία κάθε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή εισάγουμε υποθετικές φάσεις στη διαδικασία αφίξεων, ενώ στην περίπτωση που οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικοί εισάγουμε υποθετικές φάσεις στη διαδικασία εξυπηρέτησης. Τα μοντέλα Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία παρουσιάζουν μια ιδιαίτερη δομή που τα καθιστά αριθμητικά επιλύσιμα με έναν αποτελεσματικό τρόπο, ακόμα και στην περίπτωση απειροπληθούς χώρου καταστάσεων. Για παράδειγμα όταν εφαρμοστεί η ΡΗ προσέγγιση σε μια  $GI/M/1$  ουρά τότε η στάσιμη κατανομή αποδεικνύεται ότι έχει πινακογεωμετρική μορφή - μια πινακική γενίκευση της γεωμετρικής κατανομής της  $M/M/1$  ουράς. Τα αποτελέσματα του M. Neuts στον τομέα της Υπολογιστικής Θεωρίας Πιθανοτήτων οφέλησαν όχι μόνο αυτούς που χρησιμοποιούν την ΡΗ προσέγγιση, αλλά και αυτούς που ασχολούνται με άλλες τεχνικές, καθώς επιτρέπουν ικανοποιητικούς αριθμητικούς υπολογισμούς στην Εφαρμοσμένη Θεωρία Πιθανοτήτων. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ΡΗ προσέγγιση επιτρέπει την παραγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων σε προβλήματα με άπειρο πλήθος καταστάσεων χωρίς να περικόπτουμε τον χώρο καταστάσεων, αρκεί να υπάρχει μια κατάλληλη δομή. Αν περιοριστούμε σε αδιαχώριστα Μαρκοβιανά μοντέλα (διακριτού ή συνεχούς χρόνου), με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, τότε είναι δυνατόν να επιλυθούν και με άλλους τρόπους. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα του υπολογισμού της στάσιμης κατανομής μετατρέπεται

σε πρόβλημα Γραμμικής Άλγεβρας, καθώς οι στάσιμες πιθανότητες αποτελούν τη μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας. Συνεπώς, το συγκεκριμένο πρόβλημα επιλύεται με πλήθος τεχνικών που απορρέουν από τη Γραμμική Άλγεβρα όπως η απαλοιφή του Gauss, η  $LU$  ανάλυση ή και με πιο άμεση προσέγγιση, όπως τον υπολογισμό των διαδοχικών δυνάμεων του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ( στην περίπτωση διακριτού χρόνου ), καθώς και άλλες. Πολλοί ερευνητές από την Αριθμητική Ανάλυση και την Γραμμική Άλγεβρα έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη των Μαρκοβιανών αλυσίδων, καθώς αποτελεί πλούσια πηγή εφαρμογών, με αποτέλεσμα την εύρεση πολλών και διαφορετικών αλγόριθμων που υπολογίζουν τη στάσιμη κατανομή.

Πολλές καινοτόμες προσεγγίσεις στην Υπολογιστική Θεωρία Πιθανοτήτων έχουν γίνει όχι μόνο από τον M. Neuts αλλά και από τους Grassmann, Taksar και Heyman ( μια μέθοδός τους αναπτύσσεται εκτενώς στην παρούσα εργασία και αποτελεί βελτίωση της απαλοιφής του Gauss για την εύρεση της στάσιμης κατανομής πεπερασμένης αλυσίδας ). Ένα πολύ καλό σύγγραμμα στην αριθμητική ανάλυση των Μαρκοβιανών αλυσίδων αποτελεί το βιβλίο του Stewart[ 20 - 22 ].

Πρόσφατες δουλειές σε αποτελεσματικές αριθμητικές τεχνικές για την αντιστροφή μετασχηματισμών έδωσαν νέα πνοή στη χρήση των πιθανογεννητριών συναρτήσεων και των μετασχηματισμών Laplace στην Εφαρμοσμένη Θεωρία Πιθανοτήτων. Μεγάλο μέρος αυτής της δουλειάς έχει γίνει από τους J. Abate, G. L. Choudhury, K. K. Leung, D. M. Lucantoni και W. Whitt με τη δημοσίευση πολλών εργασιών με θέμα τις αριθμητικές τεχνικές για την αντιστροφή μετασχηματισμών και την εφαρμογή αυτών των τεχνικών σε πλήθος στοχαστικών μοντέλων. Οι εργασίες αυτές έλαβαν την τιμητική μνεία του βραβείου INFORMS Lancaster το 1997. Για μια σύντομη επισκόπηση αυτών των τεχνικών παραπέμπουμε στην πρόσφατη εργασία των Abate, Choudhury και Whitt[ 2 ].

”To do work in computational mathematics is ... a commitment to a more demanding definition of what constitutes the solution to a mathematical problem. When done properly, it conforms to the highest standard of scientific research.” Marcel Neuts (1973)

## 1.2 Σύντομη επισκόπηση των Μαρκοβιανών αλυσίδων

Είναι πολλές φορές δυνατή η αναπαράσταση της συμπεριφοράς ενός συστήματος καταγράφοντας όλες τις πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα και επισημαίνοντας τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα κινείται μεταξύ αυτών των καταστάσεων στο χρόνο. Η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα Μαρκοβιανά συστήματα, γνωστή ως Μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι ότι η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα κατάσταση του συστήματος και όχι από την παρελθούσα ιστορία του. Για συστήματα σε συνεχή χρόνο, αν ο χρόνος παραμονής σε κάθε μια από τις καταστάσεις ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε το σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας. Σε πολλές περιπτώσεις που το σύστημα δεν διαθέτει αυτή την ιδιότητα είναι εύκολο να βρεθεί κατάλληλη αναπαράσταση. Άμεσα συσχετισμένο με κάθε Μαρκοβιανή διαδικασία είναι ένα σύνολο καταστάσεων. Το σύστημα μπορεί κάθε χρονική στιγμή να καταλαμβάνει μια μόνο από τις καταστάσεις του συνόλου.

### Μαρκοβιανές αλυσίδες

Μια στοχαστική διαδικασία ορίζεται ως η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών  $\{X(t), t \in T\}$  ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Η παράμετρος  $t$  αναφέρεται ως χρόνος και παίρνει τιμές επί του παραμετρικού χώρου  $T$ . Αν  $T$  αριθμησιμο σύνολο ( συνήθως υποσύνολο του  $\mathbb{N}_0$  ) η στοχαστική διαδικασία αναφέρεται ως διακριτού χρόνου και συμβολίζεται με  $\{X_n, n \in T \subset \mathbb{N}_0\}$ . Αν  $T$  υπεραριθμησιμο σύνολο ( συνήθως το  $\mathbb{R}_0^+$  ) η στοχαστική διαδικασία αναφέρεται ως συνεχούς χρόνου και συμβολίζεται με  $\{X(t), t \in T \subset \mathbb{R}_0^+\}$ . Κάθε δυνατή τιμή των τυχαίων μεταβλητών  $X(t)$  λέγεται κατάσταση της διαδικασίας και το σύνολο των δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα καλείται χώρος καταστάσεων. Ο χώρος καταστάσεων αναφέρεται ως διακριτός αν είναι πεπερασμένο ή αριθμησιμο σύνολο και ως συνεχής αν είναι υπεραριθμησιμο σύνολο. Στο εξής το χώρο καταστάσεων θα τον συμβολίζουμε με  $S$ . Μια στοχαστική διαδικασία καλείται Μαρκοβιανή διαδικασία αν ικανοποιεί τη Μαρκοβιανή ιδιότητα

$$P[X(t) \leq x \mid X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n] = P[X(t) \leq x \mid X(t_n) = x_n],$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}_0$  και κάθε ακολουθία  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , με  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$ .

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες με διακριτό χώρο καταστάσεων αναφέρονται ως Μαρκοβιανές αλυσίδες.

## Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου

Θα ορίσουμε αρχικά τις Μαρκοβιανές διαδικασίες διακριτού χρόνου και χώρου καταστάσεων.

**Ορισμός 1.1** (Μαρκοβιανή ιδιότητα). *Η στοχαστική διαδικασία  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  καλείται Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν*

$$P[X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \dots, X_n = i] = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i],$$

για καταστάσεις  $i, j \in S$  και για κάθε χρονική στιγμή  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε την κατάσταση  $X_n$  του συστήματος τη χρονική στιγμή  $n$ , τότε η παρελθούσα ιστορία  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  δεν παίζει κανένα ρόλο στον καθορισμό της κατάστασης που θα επισκεφτεί το σύστημα τη χρονική στιγμή  $n + 1$ .

**Ορισμός 1.2** (Χρονική ομογένεια). *Η Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  καλείται χρονικά ομογενής αν και μόνο αν*

$$P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i],$$

για καταστάσεις  $i, j \in S$  και για κάθε χρονική στιγμή  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια αποκλειστικά με χρονικά ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες, οι οποίες για συντομία θα αναφέρονται ως Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Ορίζουμε τον πίνακα  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ , ο οποίος καλείται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης, με στοιχεία

$$p_{ij} = P[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

όπου  $i, j \in S$ . Ο  $P$  είναι ένας στοχαστικός πίνακας (δηλαδή τετραγωνικός πίνακας μη-αρνητικών στοιχείων, του οποίου το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1).

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης παίζει σημαντικό ρόλο εφόσον η συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας χαρακτηρίζεται πλήρως από τις πιθανότητες πρώτης τάξης και την αρχική κατανομή.



**Πρόταση 1.1.** Οι πιθανότητες μετάβασης  $k$ -τάξης δίνονται από τη σχέση

$$p_{ij}^{(k)} = P[X_{n+k} = j \mid X_n = i] = (P^k)_{ij} ,$$

για καταστάσεις  $i, j \in S$  και για κάθε χρονική στιγμή  $n \in \mathbb{N}_0$  και για όλα τα χρονικά διαστήματα μήκους  $k \geq 1$ .

Έστω  $\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)})_{i \in S}$  το διάνυσμα πιθανοτήτων  $n$ -τάξης της Μαρκοβιανής αλυσίδας, με  $\pi_i^{(n)} = P[X_n = i \mid X_0]$ . Τότε από την πρόταση 1.1 έπεται ότι

$$\pi^{(n+1)T} = \pi^{(n)T} P , \quad n \geq 0$$

και

$$\pi^{(n)T} = \pi^{(0)T} P^n , \quad n \geq 0 .$$

Το  $\pi^{(n)}$  θεωρούμενο ως συνάρτηση του  $n$ , δηλαδή η ακολουθία κατανομών  $\{\pi^{(n)} , n \in \mathbb{N}_0\}$ , αναφέρεται ως η μεταβατική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  είναι πλήρως ορισμένη όταν δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  και η αρχική κατανομή.

**Πρόταση 1.2.** Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & P[X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \dots, X_{n+k} = j_k \mid X_n = i] \\ &= P[X_1 = j_1, X_2 = j_2, \dots, X_k = j_k \mid X_0 = i] \\ &= p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{k-1} j_k} \end{aligned}$$

για κάθε χρονική στιγμή  $n \geq 0$ , και για όλα τα χρονικά διαστήματα μήκους  $k \geq 1$ , καθώς και για κάθε ακολουθία καταστάσεων  $i, j_1, \dots, j_k \in S$ .

Θα εισάγουμε στη συνέχεια την έννοια του χρόνου διακοπής και της Ισχυρής Μαρκοβιανής ιδιότητας.

**Ορισμός 1.3.** Ένας τυχαίος χρόνος  $V$  με τιμές από το σύνολο  $\{0, 1, \dots, N\}$  καλείται χρόνος διακοπής της Μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$  αν για κάθε  $k = 0, 1, \dots, N$  το ενδεχόμενο  $\{V = k\}$  καθορίζεται από την ιστορία της Μαρκοβιανής αλυσίδας μέχρι τη χρονική στιγμή  $k$ .

**Θεώρημα 1.1** (Ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα). Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ . Έστω  $V$  χρόνος διακοπής της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Κάτω από τη δέσμευση  $V < \infty$  και  $X_V = i$  η διαδικασία  $\{X_{V+n}, n \geq 0\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  και αρχική κατάσταση  $i$ , και είναι ανεξάρτητη των  $X_0, X_1, \dots, X_V$ .

### Διάκριση καταστάσεων

Οι καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας μπορούν να χαρακτηριστούν ως θετικά επαναληπτικές, μη-δενικά επαναληπτικές ή παροδικές, ενώ μπορούν να οριστούν σύνολα καταστάσεων μέσα στα οποία οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου. Η διάκριση των καταστάσεων βασίζεται στις τυχαίες μεταβλητές που μετρούν το πλήθος των επισκέψεων σε κάθε μια κατάσταση και στις τυχαίες μεταβλητές που μετράνε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων στην ίδια κατάσταση.

Θα εισάγουμε την έννοια του χρόνου πρώτου περάσματος από την κατάσταση  $j$ , και θα τον συμβολίζουμε με  $\vartheta_j$ . Είναι

$$\vartheta_j = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}.$$

Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει ο χρόνος πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση  $j$ , χωρίς όμως να λαμβάνουμε υπόψη την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα τη χρονική στιγμή 0. Ορίζουμε τον χρόνο πρώτης επανόδου στην κατάσταση  $j$ , και θα τον συμβολίζουμε με  $\varepsilon_j$ . Είναι

$$\varepsilon_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}.$$

Ο ορισμός του χρόνου πρώτης επανόδου διαφέρει από αυτόν του χρόνου πρώτου περάσματος μόνο στην περίπτωση που τη χρονική στιγμή 0 το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $j$ .

Ορίζουμε την πιθανότητα πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση  $j$ , σε πεπερασμένο χρόνο, ξεκινώντας από την κατάσταση  $i$ , και θα την συμβολίζουμε με  $f_{ij}$ . Είναι

$$f_{ij} = P[\varepsilon_j < \infty \mid X_0 = i].$$

Θεμελιώδους σημασίας είναι η παρατήρηση ότι με κάθε επίσκεψη στην κατάσταση  $j$  η Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να θεωρηθεί ότι ξεκινάει πάλι από την αρχή, με αρχική κατάσταση την  $j$ , και ανεξάρτητα από την παρελθούσα ιστορία της. Αυτό είναι αποτέλεσμα της Μαρκοβιανής ιδιότητας σε συνδυασμό με την χρονική ομογένεια, δηλαδή προκύπτει από το γεγονός ότι με κάθε επίσκεψη στην  $j$ , η μελλοντική εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας καθορίζεται από τον ίδιο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης και ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη παρελθούσα ιστορία της.

Ορίζουμε  $N_j$  να είναι το πλήθος των επισκέψεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση  $j$ , με

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{(j)}, \quad j \in S,$$

όπου  $I_n^{(j)}$  δείκτρια συνάρτηση με

$$I_n^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{X_n = j\} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

**Θεώρημα 1.2.** Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $N_j$ , δεδομένου ότι  $X_0 = j$ , δίνεται από τη σχέση

$$P[N_j = n \mid X_0 = j] = f_{jj}^{n-1}(1 - f_{jj}), \quad n \geq 1.$$

Ενώ η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $N_j$ , δεδομένου ότι  $X_0 = i \neq j$ , δίνεται από τη σχέση

$$P[N_j = n \mid X_0 = i] = \begin{cases} 1 - f_{ij}, & n = 0 \\ f_{ij}f_{jj}^{n-1}(1 - f_{jj}), & n \geq 1. \end{cases}$$

**Ορισμός 1.4.** Η κατάσταση  $j$  καλείται επαναληπτική αν  $f_{jj} = 1$ , και παροδική αν  $f_{jj} < 1$ . Επιπλέον η επαναληπτική κατάσταση  $j$  λέγεται θετικά επαναληπτική αν  $E[\varepsilon_j \mid X_0 = j] < \infty$ , και μηδενικά επαναληπτική αν  $E[\varepsilon_j \mid X_0 = j] = \infty$ .

Ορίζουμε  $r_{ij} = E[N_j | X_0 = i]$ . Τότε, αφού η  $N_j$  ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, έχουμε ότι

$$r_{ij} = \begin{cases} f_{ij}(1 - f_{jj})^{-1}, & i \neq j \\ (1 - f_{jj})^{-1}, & i = j. \end{cases}$$

**Λήμμα 1.1.** Το μέσο πλήθος των επισκέψεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση  $j$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $i$  τη χρονική στιγμή  $0$ , δίνεται από τη σχέση

$$E[N_j | X_0 = i] = \sum_{n \geq 0} (P^n)_{ij} = r_{ij}.$$

Αν η κατάσταση  $j$  είναι παροδική τότε  $r_{ij} \leq r_{jj} < \infty$  για κάθε  $i$ . Αν η κατάσταση  $j$  είναι επαναληπτική τότε  $r_{jj} = \infty$  και  $r_{ij} = \infty$  ή  $0$  για  $i \neq j$ .

### Επικοινωνία των καταστάσεων

Κάθε διαδοχή μεταβάσεων με αρχική κατάσταση την  $i$  και τελική κατάσταση την  $j$ , της μορφής  $i \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow j$ , καλείται μονοπάτι μήκους  $n$ . Θα λέμε ότι η κατάσταση  $j$  είναι προσιτή από την  $i$  αν υπάρχει πεπερασμένο μονοπάτι θετικής πιθανότητας που να οδηγεί από την  $i$  στην  $j$ . Θα λέμε ότι οι καταστάσεις  $i$  και  $j$  επικοινωνούν αν η  $j$  είναι προσιτή από την  $i$  και αν η  $i$  είναι προσιτή από την  $j$ .

Η επικοινωνία είναι μια διμελής σχέση καταστάσεων, διαθέτει τις παρακάτω ιδιότητες

- (i)  $i \leftrightarrow i$  (αντανακλαστική)
- (ii)  $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$  (συμμετρική)
- (iii)  $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$  (μεταβατική)

και επομένως είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο χώρο καταστάσεων. Έτσι ο χώρος καταστάσεων διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας, όπου οι καταστάσεις κάθε κλάσης είναι εκείνες που επικοινωνούν μεταξύ τους. Οι κλάσεις αυτές αναφέρονται ως κλάσεις επικοινωνίας. Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε ένα γνήσιο υποσύνολο, έστω  $C$ , του χώρου καταστάσεων  $S$ , τότε για κάθε κατάσταση  $i \in C$ , αν αυτή επικοινωνεί με κάποια άλλη κατάσταση του χώρου καταστάσεων  $S$ , έστω  $j \in S$ , τότε έπεται ότι  $j \in C$ .

**Ορισμός 1.5.** Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται διαχωρίστη αν και μόνο αν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, δηλαδή αν όλες οι καταστάσεις ανήκουν σε μια μόνο κλάση επικοινωνίας.

Μια κλάση επικοινωνίας θα καλείται κλειστή αν δεν υπάρχει μονοπάτι που να οδηγεί εκτός αυτής, δηλαδή αν για κάθε κατάσταση  $i$  που ανήκει στην κλάση επικοινωνίας, έστω  $C$ , δεν υπάρχει κατάσταση  $j \notin C$  τέτοια ώστε η  $j$  να είναι προσιτή από την  $i$ . Αν υπάρχει κάποια κατάσταση της κλάσης επικοινωνίας, έστω  $C$ , που να οδηγεί σε κάποια από τις καταστάσεις του  $S \setminus C$ , τότε η κλάση επικοινωνίας  $C$  καλείται ανοιχτή.

Στην περίπτωση κλειστού μονοσυνόλου  $C = \{i\}$ , η κατάσταση  $i$  αναφέρεται ως κατάσταση απορρόφησης.

Τα επόμενα θεωρήματα είναι χρήσιμα για την ταξινόμηση των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

**Θεώρημα 1.3.** Αν δύο καταστάσεις επικοινωνούν τότε αυτές είναι του ίδιου τύπου, δηλαδή και οι δύο είναι θετικά επαναληπτικές ή μηδενικά επαναληπτικές ή παροδικές.

Συμπεραίνουμε ότι όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνίας είναι του ίδιου τύπου. Ειδικά όλες οι καταστάσεις μιας διαχωρίστης Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι του ίδιου τύπου.

**Θεώρημα 1.4.** Όλες οι καταστάσεις ενός ανοιχτού συνόλου είναι παροδικές. Σε ένα κλειστό σύνολο, οι καταστάσεις είναι είτε όλες θετικά επαναληπτικές, είτε μηδενικά επαναληπτικές, είτε παροδικές.

Συνεπώς μια κλάση επικοινωνίας αναφέρεται ως θετικά επαναληπτική, μηδενικά επαναληπτική ή παροδική ανάλογα με το αν μια κατάσταση της ( και επομένως όλες ) είναι του αντίστοιχου τύπου.

Στην περίπτωση που έχουμε μια κλειστή κλάση επικοινωνίας πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων ισχύουν τα επόμενα.

**Θεώρημα 1.5.** Κάθε πεπερασμένη κλειστή κλάση επικοινωνίας είναι θετικά επαναληπτική.

**Θεώρημα 1.6.** Κάθε επαναληπτική κλάση επικοινωνίας είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον  $f_{ij} = 1$  για οποιεσδήποτε καταστάσεις  $i, j$  αυτής.

### Στάσιμη κατανομή

Στην παράγραφο αυτή θα εμβαθύνουμε στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της μεταβατικής κατανομής της  $X_n$ , ή ισοδύναμα, της ακολουθίας  $P^n$ , όπου  $P$  ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Θα πρέπει όμως πρώτα να αναπτύξουμε την έννοια της περιοδικότητας.

Θα λέμε ότι η κατάσταση  $i$  είναι περιοδική, περιόδου  $\delta > 1$ , αν όλα τα μονοπάτια με αρχή και πέρας την κατάσταση  $i$  είναι μονοπάτια μήκους  $k\delta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι  $P[X_n = i \mid X_0 = i] > 0$  αν και μόνο αν  $n = 0 \bmod \delta$ . Στην αντίθετη περίπτωση, που  $\delta = 1$ , η κατάσταση θα χαρακτηρίζεται ως απεριοδική. Σε μια κλάση επικοινωνίας όλες οι καταστάσεις είναι απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο. Αν περιοριστούμε μόνο σε διαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες τότε όλες οι καταστάσεις είναι είτε απεριοδικές, είτε περιοδικές με την ίδια περίοδο  $\delta$ , η οποία θα είναι και η περίοδος της αλυσίδας.

Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι διαχώριστη και απεριοδική τότε αποδεικνύεται, εύκολα, ότι για όλα τα  $i$  και  $j$ , υπάρχει  $n_0$  τέτοιο που  $P[X_n = j \mid X_0 = i] > 0$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε αρχική κατάσταση  $i$  και κάθε τελική κατάσταση  $j$ , υπάρχει θετική πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση  $j$  σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, αρκεί να έχουμε αφήσει το σύστημα να εξελιχθεί για ένα επαρκές χρονικό διάστημα. Προφανώς ο παραπάνω ισχυρισμός δεν ευσταθεί αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι περιοδική, εφόσον το διάστημα που μεσολαβεί μέχρι να επιστρέψει το σύστημα στην κατάσταση  $j$  θα είναι πολλαπλάσιο της περιόδου του συστήματος.

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με την οριακή κατανομή.

**Θεώρημα 1.7.** Έστω μια διαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Αν οι καταστάσεις είναι παροδικές τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = j \mid X_0 = i] = 0 \quad \text{για κάθε } i, j .$$

Θα αναλύσουμε στη συνέχεια την περίπτωση θετικά επαναληπτικής Μαρκοβιανής αλυσίδας.

**Θεώρημα 1.8.** Έστω μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν υπάρχει γνήσια θετικό διάνυσμα πιθανότητας, έστω  $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ , τέτοιο που  $\pi_i > 0$  για κάθε  $i$ , με

$$\pi^T P = \pi^T \quad \text{και} \quad \pi \mathbf{1} = 1 .$$

Στην περίπτωση αυτή,

(i) αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι απεριοδική, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = j \mid X_0 = i] = \pi_j$$

για κάθε  $j$ , ανεξάρτητα του  $i$ ,

(ii) αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι περιοδική, με περίοδο  $\delta$ , τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_{n\delta} = j \mid X_0 = j] = \delta \pi_j$$

για κάθε  $j$ .

(iii) Οι μη αρνητικές λύσεις της  $\mathbf{x}^T P = \mathbf{x}^T$  είναι βαθμωτά πολλαπλάσια της  $\pi$ .

Παρατηρούμε, στην περίπτωση που η αλυσίδα είναι απεριοδική, ότι το  $1/\pi_i$  εκφράζει τον μέσο χρόνο επανόδου στην κατάσταση  $i$ .

**Θεώρημα 1.9.** Έστω μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Αν Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μηδενικά επαναληπτική τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = j \mid X_0 = i] = 0 \quad \text{για κάθε} \quad i, j .$$

## Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Στην περίπτωση στοχαστικών διαδικασιών συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων, η Μαρκοβιανή ιδιότητα εκφράζεται από τον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 1.6.** Μια στοχαστική διαδικασία  $\{X(t), t \geq 0\}$ , με διακριτό χώρο καταστάσεων  $S$ , λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν αυτή έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα

$$P[X(s+t) = j \mid X(u), 0 \leq u < s, X(s) = i] = P[X(s+t) = j \mid X(s) = i] \quad s, t \geq 0, j, i \in S .$$

Ισοδύναμα, η  $\{X(t)\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής  $X(t)$ , οι τυχαίες μεταβλητές  $\{X(u), u < t\}$  και  $\{X(v), v > t\}$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες και αυτό ισχύει για κάθε  $t > 0$ .

**Ορισμός 1.7.** Η Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X(t), t \geq 0\}$  καλείται χρονικά ομογενής αν και μόνο αν

$$p_{ij}(t) = P[X(s+t) = j \mid X(s) = i] = P[X(t) = j \mid X(0) = i] ,$$

για κάθε κατάσταση  $i, j \in S$  και για κάθε χρονική στιγμή  $t > 0$ .

Για δεδομένα  $i, j \in S$ , η  $p_{ij}(t)$  θεωρούμενη ως συνάρτηση του χρόνου  $t \geq 0$ , λέγεται συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης. Οι  $p_{ij}(t)$ ,  $i, j \in S$  γράφονται σε συμπαγή μορφή ως στοιχεία ενός πίνακα

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in S} = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με κανονικές Μαρκοβιανές αλυσίδες, στις οποίες ισχύει ότι

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1 , \text{ για κάθε } t \geq 0 .$$

Ενώ οι Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου αναπαρίστανται μέσω του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης,  $P$ , οι Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου αναπαρίστανται μέσω του πίνακα ρυθμών μετάβασης. Θα αναφέρουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των πιθανοτήτων μετάβασης και των ρυθμών μετάβασης.



Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις  $p_{ij}(t)$ ,  $t \geq 0$ , είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $[0, \infty)$  και επιπλέον ότι υπάρχει η δεξιά παράγωγος τους στο 0, και έστω  $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ . Αναλυτικά

$$q_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, \quad i, j \in S, i \neq j$$

$$q_{ii} = p'_{ii}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}, \quad i \in S.$$

Θέτουμε  $q_i = -q_{ii}$ .

Οι ποσότητες αυτές ικανοποιούν τις σχέσεις

$$0 \leq q_{ij} < \infty, \quad 0 \leq q_i \leq \infty, \quad q_i \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Σε ότι ακολουθεί θα ασχοληθούμε όπως είπαμε αποκλειστικά με κανονικές Μαρκοβιανές αλυσίδες για τις οποίες επιπλέον ισχύει ότι

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Τα στοιχεία  $q_{ij}$  καλούνται ρυθμοί μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$  και έχουν τις παρακάτω ιδιότητες

- (i) Για  $i \neq j$  το στοιχείο  $q_{ij}$  εκφράζει τον ρυθμό μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$ , δηλαδή  $p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$ , όπου  $o(h)$  είναι ένας παράγοντας διόρθωσης με την ιδιότητα  $o(h) \rightarrow 0$  καθώς  $h \rightarrow 0$ . Συνεπώς τα  $q_{ij}$  είναι πάντα μη αρνητικά, και είναι θετικά όταν είναι δυνατή η μετάβαση απευθείας από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$ .
- (ii) Τα διαγώνια στοιχεία ικανοποιούν τη σχέση  $q_{ii} = - \sum_{i \neq j, i \in S} q_{ij} = -q_i$ . Η ερμηνεία τους δίνεται από το γεγονός ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα παραμένει στην κατάσταση  $i$  ένα εκθετικό χρονικό διάστημα, με παράμετρο  $q_i = -q_{ii}$ , για κάθε κατάσταση  $i \in S$ , μέχρι να περάσει στην επόμενη κατάσταση  $j$  με πιθανότητα  $\frac{q_{ij}}{q_i}$ . Στην περίπτωση που  $q_{ii} = 0$ , έπεται άμεσα ότι  $q_{ij} = 0$  και άρα η κατάσταση  $i$  είναι απορροφητική.

Οι ρυθμοί μετάβασης γράφονται συνοπτικά με τη μορφή ενός πίνακα

$$Q = (q_{ij}(t))_{i,j \in S} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας προσδιορίζει πλήρως τους πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης  $P(t)$ ,  $t \geq 0$  που δίνονται ως η ελάχιστη μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q ,$$

με την αρχική συνθήκη  $P(0) = I$ .

Ο πίνακας  $Q$  παίζει τον ίδιο ρόλο για την Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου που παίζει ο πίνακας  $P - I$  για την Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι ισοδύναμο του θεωρήματος 1.8.

**Θεώρημα 1.10.** Έστω μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν υπάρχει διάνυσμα πιθανότητας  $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in S}$ , τέτοιο που  $p_i > 0$  για κάθε  $i$  με

$$\mathbf{p}^T Q = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \mathbf{p}^T \mathbf{1} = 1 .$$

Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) = j \mid X(0) = i] = p_j$$

για κάθε  $j$ , ανεξάρτητα του  $i$ .

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες  $Q$  και  $P - I$  έχουν κοινά χαρακτηριστικά. Θα δείξουμε στην επόμενη παράγραφο την σχέση που υπάρχει μεταξύ των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου και των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου.

## Ομοιομορφοποίηση

Έστω  $\{X(t), t \geq 0\}$  μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων  $S$  και πίνακα ρυθμών μετάβασης  $Q$ . Έστω ότι η  $\{X(t), t \geq 0\}$  είναι αδιαχώριστη και έστω  $\mathbf{p}$  η στάσιμη κατανομή. Η  $\{X(t), t \geq 0\}$  θα καλείται ομοιομορφοποιήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει  $\Lambda$  τέτοιο που  $q_i \leq \Lambda < \infty$  για κάθε κατάσταση  $i \in S$ . Τότε κατασκευάζουμε την αντίστοιχη ομοιομορφοποιημένη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = I + \frac{1}{\Lambda}Q.$$

Τότε αποδεικνύεται ότι η στάσιμη κατανομή της ομοιομορφοποιημένης  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  είναι επίσης η  $\mathbf{p}$ . Δοθείσης της  $\{X(t), t \geq 0\}$ , η  $\{X_n\}$  είναι η διαδικασία που προκύπτει καταγράφοντας την κατάσταση της  $\{X(t)\}$  τις στιγμές των γεγονότων μιας Poisson διαδικασίας με ρυθμό  $\Lambda$ .

Αντίστροφα, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι η αρχική διαδικασία  $\{X(t)\}$  δημιουργείται ως εξής.

Έστω μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\Lambda$  και έστω  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$  να είναι οι χρονικές στιγμές των διαδοχικών γεγονότων. Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου  $\{X_n\}$  με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ , ανεξάρτητη της διαδικασίας Poisson. Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}$  με τέτοιο τρόπο ώστε  $X(t) = X_n$  όταν  $t_n \leq t < t_{n+1}$  και  $n > 0$ . Τότε  $X(t)$  είναι Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών  $Q$  τέτοιο ώστε

$$P = I + \frac{1}{\Lambda}Q.$$

## PH τυχαίες μεταβλητές

Ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων  $\{0, 1, \dots, n\}$ , με διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων  $(\tau_0, \tau)$  και πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$Q = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{t} & T \end{array} \right],$$

όπου  $\tau$  είναι ένα διάνυσμα γραμμή  $(1 \times n)$ ,  $T$  είναι ένας  $(n \times n)$  πίνακας και  $\mathbf{t}$  είναι ένα διάνυσμα στήλη  $(n \times 1)$ . Εφόσον  $Q$  είναι ο πίνακας ρυθμών μετάβασης θα ισχύει ότι

$$T_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad T_{ii} < 0, \quad t_i \geq 0,$$

επιπλέον

$$T\mathbf{1} + \mathbf{t} = \mathbf{0} ,$$

όπου  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]'$  και ότι

$$\tau_0 + \tau\mathbf{1} = 1 .$$

**Ορισμός 1.8.** Η κατανομή του χρόνου  $X$  που απαιτείται μέχρι την απορρόφηση στην κατάσταση 0 καλείται συνεχής PH κατανομή με παράσταση  $(\tau, T)$  και θα την συμβολίζουμε με  $PH(\tau, T)$ .

Παρακάτω συνοψίζουμε μερικά βασικά αποτελέσματα για τις PH κατανομές. Για λεπτομερείς αποδείξεις και άλλα αποτελέσματα παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Latouche και Ramaswami[ 7 ].

**Θεώρημα 1.11.** Έστω  $X$  μια τ.μ. με κατανομή  $PH(\tau, T)$ . Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από την

$$F(x) = 1 - \tau \exp\{Tx\}\mathbf{1} , \quad x \geq 0 ,$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας από τη σχέση

$$f(x) = \tau \exp\{Tx\}\mathbf{t} , \quad x > 0 .$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η παράσταση  $(\tau, T)$  δεν είναι μοναδική, αντίθετα για κάθε PH κατανομή υπάρχουν άπειρες το πλήθος διαφορετικές απεικονίσεις.

Η κατανομή  $PH(\tau, T)$  είναι γνήσια αν  $F(\infty) = 1$ , δηλαδή η απορρόφηση στη κατάσταση 0 γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο σχεδόν βέβαια.

**Θεώρημα 1.12.** Για κάθε γνήσια PH κατανομή υπάρχει μια αναπαράσταση  $(\tau, T)$  που ικανοποιεί την επιπλέον υπόθεση ότι ξεκινώντας από οποιαδήποτε φάση  $\{1, \dots, n\}$  η απορρόφηση στην κατάσταση 0 συμβαίνει με πιθανότητα 1.

Από το διάγραμμα μεταβάσεων μπορούμε άμεσα να αποφανθούμε αν η PH κατανομή είναι γνήσια. Αρκεί για κάθε κατάσταση για την οποία  $\tau_i > 0$ , όλα τα πιθανά μονοπάτια να οδηγούν στην κατάσταση απορρόφησης. Η αλγεβρική συνθήκη κάτω από την οποία μια PH-κατανομή είναι γνήσια δίνεται στο επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 1.13.** Έστω  $PH(\tau, T)$  κατανομή. Απορρόφηση στην κατάσταση 0 συμβαίνει με πιθανότητα 1 από κάθε φάση  $i$  του συνόλου  $\{1, \dots, n\}$  αν ο πίνακας  $T$  είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον το στοιχείο  $(-T^{-1})_{ij}$  είναι ο συνολικός αναμενόμενος χρόνος παραμονής στη φάση  $j$  μέσα σε ένα χρόνο απορρόφησης δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η  $i$ .

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με διακριτές PH κατανομές.

Όπως ορίσαμε τις συνεχείς PH κατανομές θα ορίσουμε τις διακριτές PH κατανομές, τις οποίες θα συμβολίσουμε με  $PH_d(\tau, T)$ , θεωρώντας τες ως την κατανομή του χρόνου απορρόφησης στη κατάσταση 0 μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου με διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων  $(\tau_0, \tau)$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & T \end{bmatrix},$$

όπου  $\tau$  είναι ένα διάνυσμα γραμμή ( $1 \times n$ ),  $T$  είναι ένας ( $n \times n$ ) πίνακας και  $\mathbf{t}$  είναι ένα διάνυσμα στήλη ( $n \times 1$ ). Θα έχουμε ότι

$$T_{ij} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad t_i \geq 0,$$

επιπλέον

$$T\mathbf{1} + \mathbf{t} = \mathbf{1},$$

όπου  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]'$  και ότι

$$\tau_0 + \tau\mathbf{1} = 1.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι  $P^k = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} - T^k\mathbf{1} & T^k \end{bmatrix}$  και τότε παίρνουμε τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πιθανότητας όπως φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 1.14.** Έστω ότι  $X$  είναι μια  $PH_d(\tau, T)$ . Τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= \tau_0 \\ P[X = k] &= \tau T^{k-1}\mathbf{t}, \quad \text{για } k \geq 1, \\ P[X \leq k] &= 1 - \tau T^k\mathbf{1}, \quad \text{για } k \geq 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα με τη συνεχή περίπτωση μπορούμε να δείξουμε ότι για γνήσιες διακριτές PH κατανομές υπάρχει κατάλληλη αναπαράσταση έτσι ώστε ο πίνακας  $I - T$  να είναι αντιστρέψιμος, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι η απορρόφηση συμβαίνει σχεδόν βέβαια από κάθε φάση. Θα έχουμε τότε ότι το  $(I - T)_{ij}^{-1}$  είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων στη φάση  $j$  πριν να συμβεί η απορρόφηση, δεδομένου ότι το σύστημα ξεκίνησε από τη φάση  $i$ .

### 1.3 Σκοπός και δομή της εργασίας

Οι Πινακοαναλυτικές Μέθοδοι έχουν κερδίσει την εκτίμηση και το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών ως εργαλείο για την ακριβή ανάλυση πλήθους ουρών αναμονής. Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα στην μοντελοποίηση και την ανάλυση της απόδοσης υπολογιστών, συστημάτων τηλεπικοινωνιών, καθώς και άλλων στοχαστικών συστημάτων. Ο λόγος που τα τελευταία χρόνια αυτές οι μέθοδοι γίνονται όλο και πιο δημοφιλείς οφείλεται στην ύπαρξη πολλαπλών αλγόριθμων που προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη στάσιμη κατανομή.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αναπτύξει και να παρουσιάσει το θεωρητικό υπόβαθρο που πλαισιώνει την εύρεση της στάσιμης κατανομής και την προσέγγιση αυτής αλγοριθμικά. Η εργασία αυτή παρουσιάζει κάποιες από τις βασικές μαθηματικές ιδέες και τους αλγόριθμους της Πινακοαναλυτικής θεωρίας. Η προσέγγιση μας χρησιμοποιεί κυρίως πιθανοθεωρητικούς ισχυρισμούς και αναλυτικές αποδείξεις, με τον τρόπο αυτό αναγώμαστε σε κάθε βήμα σε μια πιθανοθεωρητική ερμηνεία της μεθοδολογίας που αναπτύσσεται. Βασικό εργαλείο στην απόδειξη της μεθοδολογίας αποτέλεσαν οι Μαρκοβιανές αλυσίδες τύπου QBD. Οι αλυσίδες αυτές ορίζονται σε δυο διαστάσεις, επίπεδο και φάση, ενώ η αλυσίδα δεν είναι δυνατό να διασχίσει πολλά επίπεδα σε μια μετάβαση.

Στο πρώτο κεφάλαιο συνοψίστηκαν κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα που σχετίζονται με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αρχικά εισάγουμε την έννοια των πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας σε ένα σύνολο  $B$  υποσύνολο του χώρου καταστάσεων ξεκινώντας από ένα σύνολο  $A$ , επίσης υποσύνολο του χώρου καταστάσεων, χωρίς να επιστρέψει στο  $A$  ( πιθανότητες taboo ). Μέσω των πιθανοτήτων αυτών ορίζουμε τον πίνακα των μέσων χρόνων παραμονής της αλυσίδας σε καταστάσεις του συνόλου  $B$ , ξεκινώντας από καταστάσεις του συνόλου  $A$  και πριν επιστρέψει σε αυτό. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας περιορισμένη στο σύνολο  $B$  μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της στάσιμης κατανομής περιορισμένη στο σύνολο  $A$  και του πίνακα των μέσων χρόνων παραμονής της αλυσίδας σε καταστάσεις του συνόλου  $B$ , ξεκινώντας από καταστάσεις του συνόλου  $A$  και πριν επιστρέψει σε αυτό. Συνεπώς αν γνωρίζουμε την στάσιμη κατανομή περιορισμένη στο σύνολο  $A$  είμαστε πλέον σε θέση να γνωρίζουμε την στάσιμη κατανομή στο σύνολο  $B$  για δύο τυχόντα σύνολα  $A$  και  $B$  υποσύνολα του χώρου καταστάσεων. Έπειτα αναλύουμε πως βρίσκεται η στάσιμη κατανομή σε οποιοδήποτε υποσύνολο του χώρου καταστάσεων μέσω των λογοκρινμένων Μαρκοβιανών αλυσίδων. Χρησιμοποιώντας

όλα τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στην εύρεση ενός αλγόριθμου υπολογισμού της στάσιμης κατανομής Μαρκοβιανών αλυσίδων πεπερασμένου χώρου καταστάσεων ( αλγόριθμος GTH ).

Στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύουμε αρχικά ότι για Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου τύπου QBD η στάσιμη κατανομή είναι πινακογεωμετρική, δηλαδή  $\pi_n^T = \pi_1^T R^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , όπου ο πίνακας  $R$ , που προσδιορίζει τη στάσιμη κατανομή, εκφράζει το μέσο πλήθος επισκέψεων στο αμέσως παραπάνω επίπεδο, πριν η αλυσίδα επιστρέψει στο επίπεδο από το οποίο ξεκίνησε. Στη συνέχεια εισάγουμε δυο νέους πίνακες τους  $G$  και  $U$ , οι οποίοι είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τον πίνακα  $R$ . Οι πίνακες αυτοί έχουν σημαντική πιθανοθεωρητική ερμηνεία, με την βοήθεια της οποίας θεμελιώνονται οι μεταξύ τους σχέσεις. Τα παραπάνω αποτελέσματα επεκτείνονται σε Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου τύπου QBD.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε υπολογιστικές τεχνικές για τον προσδιορισμό του πίνακα  $G$ . Αρχικά δίνεται ένας βασικός αλγόριθμος που υπολογίζει τον πίνακα  $G$ , ενώ στη συνέχεια εξετάζονται κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Τέλος παρατίθενται κάποιοι από τους πιο γνωστούς αλγόριθμους προσδιορισμού του πίνακα  $R$ .



## Κεφάλαιο 2

# Πιθανότητες κάτω από ένα σύνολο taboo

Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μια αδιαχώριστη, απεριοδική Μαρκοβιανή Αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων  $S$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ .

Θεωρούμε  $A$  ένα γνήσιο υποσύνολο του χώρου καταστάσεων  $S$ . Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τη συμπεριφορά του συστήματος καθώς κινείται στο σύνολο  $A^c = S \setminus A$  αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ .

Ορίζουμε  $\varepsilon_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}$  να είναι ο χρόνος πρώτης εισόδου σε κάποια από τις καταστάσεις του συνόλου  $A$ . Γενικά ορίζουμε  $\varepsilon_A^{(k)}$  να είναι ο χρόνος  $k$ -οστής εισόδου σε κάποια από τις καταστάσεις του συνόλου  $A$ . Είναι

$$\begin{aligned}\varepsilon_A^{(1)} &= \varepsilon_A \\ \varepsilon_A^{(k)} &= \inf\{n \geq 1 : \varepsilon_A^{(k-1)} < n, X_{n-1} \in A^c, X_n \in A\}, k \geq 2.\end{aligned}$$

### 2.1 Πιθανότητες taboo και υπολογισμοί

Έστω  $A \subsetneq S$  και έστω  $P_{AA} = \{P_{ij} : i, j \in A\}$  να είναι ο υποπίνακας του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης που αναφέρεται, όμως, μόνο στις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων που ανήκουν στο σύνολο  $A$ , και έστω  $N_A$  να είναι ο πίνακας που απεικονίζει τους μέσους χρόνους παραμονής σε καταστάσεις του συνόλου  $A$ , ξεκινώντας απ' το  $A$ , πριν η αλυσίδα μεταβεί για πρώτη φορά σε καταστάσεις εκτός του  $A$ . Για την εύρεση της ακριβούς μορφής των στοιχείων  $(N_A)_{ij}$  του πίνακα  $N_A$  θα ορίσουμε τη δείτρια συνάρτηση

$${}_{A^c}I_n^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{X_n = j, \varepsilon_{A^c} \geq n + 1\} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε το  $\sum_{n \geq 0} {}_{A^c}I_n^{(j)}$  εκφράζει το πλήθος των επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in A$  πριν την πρώτη είσοδο στο σύνολο  $A^c$  και το συμβολίζουμε με  ${}_{A^c}N_j$ . Τότε

$$({}_{A^c}N_A)_{ij} = E[{}_{A^c}N_j \mid X_0 = i] = E\left[\sum_{n \geq 0} {}_{A^c}I_n^{(j)} \mid X_0 = i\right] = \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, \varepsilon_{A^c} \geq n + 1 \mid X_0 = i].$$

**Λήμμα 2.1.** Ο πίνακας  $N_A$  των μέσων χρόνων παραμονής σε καταστάσεις του συνόλου  $A$  ξεκινώντας από καταστάσεις του  $A$ , πριν η αλυσίδα μεταβεί για πρώτη φορά σε καταστάσεις εκτός του  $A$ , δίνεται από την σχέση

$$N_A = (I - P_{AA})^{-1}, \quad (2.1)$$

όπου

$$(I - P_{AA})^{-1} = \sum_{n \geq 0} P_{AA}^n \quad (2.2)$$

είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος  $(I - P_{AA})X = I$  και  $X(I - P_{AA}) = I$ .

### Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο  $\{\varepsilon_{A^c} \geq n + 1 \mid X_0 = i\}$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο  $\{X_k \in A \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid X_0 = i\}$ . Συνεπώς

$$({}_{A^c}N_A)_{ij} = \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid X_0 = i] = \sum_{n \geq 0} (P_{AA}^n)_{ij}.$$

Σε επίπεδο πινάκων η τελευταία σχέση γράφεται

$$N_A = \sum_{n \geq 0} P_{AA}^n.$$

Προφανώς,  $N_A = I + P_{AA}N_A$ , και άρα ο πίνακας  $N_A$  είναι μια μη-αρνητική λύση της εξίσωσης  $(I - P_{AA})X = I$ . Επιπλέον για κάθε μη αρνητικό πίνακα  $X$  που είναι λύση της εξίσωσης αυτής έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X &= I + P_{AA}X \\ &= I + P_{AA} + P_{AA}^2X \\ &= I + P_{AA} + P_{AA}^2 + \dots + P_{AA}^n + P_{AA}^{n+1}X \\ &\geq I + P_{AA} + P_{AA}^2 + \dots + P_{AA}^n \end{aligned}$$

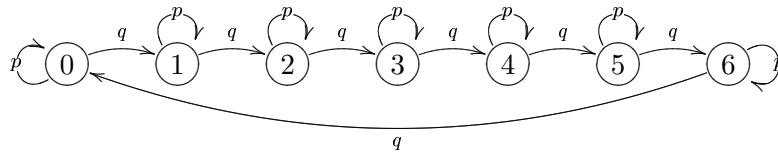
για κάθε  $n$ , άρα  $X \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n P_{AA}^i = N_A$ , αφού οι εμπλεκόμενοι πίνακες είναι μη-αρνητικοί.  $\square$

Θα εναλλάσουμε συχνά τις εκφράσεις  $(I - P_{AA})^{-1}$  και  $\sum_{n \geq 0} P_{AA}^n$ , και θα ερμηνεύουμε και τις δύο ως πίνακες των μέσων χρόνων παραμονής.

**Παράδειγμα 2.1.**

Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, \dots, 6\}$

και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P = \begin{bmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q & 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix}$ , όπου  $p + q = 1$ .



Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε σύνολο συνεχόμενων καταστάσεων  $A, A \subsetneq S$  ισχύει

$$P[X_n = j, X_k \in A \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid X_0 = i] = q^{j-i} \binom{n}{j-i} p^{n-(j-i)}, \quad i \leq j.$$

Έστω  $A = \{0, 1, 2\}$ . Τότε για  $i, j$  τυχαίες καταστάσεις του συνόλου  $A$  αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} (N_A)_{ij} &= \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid X_0 = i] \\ &= q^{j-i} \sum_{n \geq j-i} \binom{n}{j-i} p^{n-(j-i)} \\ &= q^{j-i} \sum_{m \geq 0} \binom{m+j-i}{j-i} p^m = \frac{1}{q}, \quad \text{όταν } i < j \\ &= q^{j-i} \sum_{m \geq 0} \begin{bmatrix} j-i+1 \\ m \end{bmatrix} p^m \\ &= q^{j-i} (1-p)^{-(j-i+1)} \\ &= \frac{1}{q}, \quad \text{όταν } i \leq j \end{aligned}$$

$$(N_A)_{ij} = 0, \quad \text{όταν } i > j.$$

$$\text{Συνεπώς } N_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ομοίως αποδεικνύεται ότι } N_{A^c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & 0 & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix}.$$

□

Στη συνέχεια θα εισάγουμε διάφορους συμβολισμούς. Ορίζουμε  $P_{ij}(k)$  να είναι η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην  $j$  μετά από  $k$  βήματα,  $P_{ij}(k) = P[X_k = j \mid X_0 = i]$ , και με  $P_{AB}(k)$  τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $k$ -τάξης από καταστάσεις του συνόλου  $A$  στο σύνολο  $B$ , όπου  $A$  και  $B$  είναι δυο ξένα σύνολα καταστάσεων, και  $P_{AB}(k) = \{P_{ij}(k) : i \in A, j \in B\}$ .

Επιπλέον θα ορίσουμε την πιθανότητα  ${}_A P_{ij}(k)$  μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην  $j$  μετά από  $k$  βήματα αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ ,

$${}_A P_{ij}(k) = P[X_k = j \ \& \ X_v \in A^c \ \forall v \in \{1, \dots, k-1\} \mid X_0 = i] = P[X_k = j \ \& \ \varepsilon_A \geq k \mid X_0 = i].$$

Τότε οι πιθανότητες μετάβασης  $P_{ij}(k)$ , δεσμεύοντας στην χρονική στιγμή που η αλυσίδα βρέθηκε για τελευταία φορά στο σύνολο  $A$ , πριν την στιγμή  $k$ , καθώς και στην κατάσταση του συνόλου  $A$  που βρέθηκε, μπορούν να γραφτούν συναρτήσει των πιθανοτήτων  ${}_A P_{ij}(k)$ . Έχουμε, για κάθε  $k \geq 0$ , ότι

$$P_{ij}(k) = \sum_{0 \leq v \leq k} \sum_{i' \in A} P_{i'i'}(k-v) {}_A P_{i'j}(v)$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$P_{AB}(k) = \sum_{0 \leq v \leq k} P_{AA}(k-v) {}_A P_{AB}(v).$$

Έστω δύο ξένα σύνολα,  $A$  και  $B$ , υποσύνολα του χώρου καταστάσεων  $S$ , και έστω  $i \in A$  και  $j \in B$ . Ορίζουμε  ${}_A R_{ij}$  τον μέσο αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $i \in A$ , πριν επιστρέψει σε κάποια από τις καταστάσεις του συνόλου  $A$ .

Η ακριβής μορφή των στοιχείων  ${}_A R_{ij}$  του πίνακα  ${}_A R_{AB}$  δίνεται από τη σχέση

$${}_A R_{ij} = E[{}_A N_j \mid X_0 = i] = \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, \varepsilon_A \geq n+1 \mid X_0 = i].$$

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο  $\{\varepsilon_A \geq n + 1 \mid X_0 = i\}$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο  $\{X_k \in A^c \ \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i\}$ . Συνεπώς

$${}_A R_{ij} = \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i] .$$

Έστω  ${}_A R_{AB}$  να είναι ο πίνακας που απεικονίζει τους μέσους χρόνους παραμονής σε καταστάσεις του συνόλου  $B$ , ξεκινώντας από καταστάσεις του συνόλου  $A$ , πριν η αλυσίδα επιστρέψει για πρώτη φορά σε καταστάσεις του  $A$ .

**Θεώρημα 2.1.** *Οι σχέσεις που ακολουθούν ισχύουν για οποιαδήποτε δύο ξένα υποσύνολα, έστω  $A$  και  $B$ , του χώρου καταστάσεων  $S$ ,*

$${}_A R_{AB} = P_{AA^c} {}_A R_{A^c B} = P_{AA^c} ({}_A R_{A^c A^c})_{A^c B} , \quad (2.3)$$

$${}_A R_{AA^c} = P_{AA^c} {}_A R_{A^c A^c} = P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} , \quad (2.4)$$

όπου με  $({}_A R_{A^c A^c})_{A^c B}$  συμβολίζουμε τον υποπίνακα του  ${}_A R_{A^c A^c}$  που αντιστοιχεί στους μέσους χρόνους παραμονής σε καταστάσεις του συνόλου  $B$ , ξεκινώντας από καταστάσεις του συνόλου  $A^c$ , πριν η αλυσίδα μεταβεί για πρώτη φορά σε καταστάσεις του  $A$ .

### Απόδειξη

Από τον ορισμό του μέσου αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $i \in A$ , πριν επιστρέψει σε κάποια από τις καταστάσεις του συνόλου  $A$ , έχουμε ότι

$${}_A R_{ij} = \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i] .$$

Όμως το σύστημα τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στο σύνολο  $A$  και άρα έχουμε ότι

$${}_A R_{ij} = \sum_{n \geq 1} P[X_n = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i] .$$

Δεσμεύοντας στην κατάσταση που επισκέπτεται το σύστημα μετά από ένα βήμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} {}_A R_{ij} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{l \in A^c} P[X_n = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_1 = l, X_0 = i] P[X_1 = l \mid X_0 = i] \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{l \in A^c} P[X_n = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{2, \dots, n\} \mid X_1 = l] P_{il} \\ &= \sum_{l \in A^c} P_{il} \sum_{n \geq 1} P[X_n = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{2, \dots, n\} \mid X_1 = l] \\ &= \sum_{l \in A^c} P_{il} \sum_{m \geq 0} P[X_m = j, X_k \in A^c \ \forall k \in \{1, \dots, m\} \mid X_0 = l] \\ &= \sum_{l \in A^c} P_{il} {}_A R_{lj} . \end{aligned}$$

Συνεπώς σε επίπεδο πινάκων η τελευταία σχέση γράφεται

$${}_A R_{AB} = P_{AA^c} {}_A R_{A^c B} .$$

Στην περίπτωση που  $B = A^c$  έχουμε ότι

$${}_A R_{AA^c} = P_{AA^c} {}_A R_{A^c A^c} .$$

Όμως  ${}_A R_{A^c A^c}$  είναι το μέσο πλήθος επισκέψεων σε καταστάσεις του συνόλου  $A^c$ , ξεκινώντας από το σύνολο  $A^c$ , πριν περάσει σε κατάσταση εκτός του συνόλου αυτού, άρα

$${}_A R_{A^c A^c} = N_{A^c} .$$

Συνεπώς σε επίπεδο πινάκων η τελευταία σχέση γράφεται

$${}_A R_{AA^c} = P_{AA^c} N_{A^c} .$$

Άπο το λήμμα 2.1 έχουμε ότι

$${}_A R_{AA^c} = P_{AA^c} N_{A^c} = P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} .$$

□

**Παράδειγμα 2.2.** (Συνέχεια του παραδείγματος 2.1)

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε σύνολο  $A = \{i+1, i+2, \dots, j\} \subsetneq S$  ισχύει

$$P[X_n = j, X_k \in A \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i] = q^{j-i} \binom{n-1}{j-i-1} p^{n-(j-i)} .$$

Έστω  $A = \{0, 1, 2\}$ . Τότε για  $j \in A^c$  αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} ({}_A R_{AA^c})_{2j} &= \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A^c \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = 2] \\ &= q^{j-2} \sum_{n \geq j-2} \binom{n-1}{j-3} p^{n-(j-2)} = 1 \end{aligned}$$

$$({}_A R_{AA^c})_{ij} = 0 \text{ όταν } i=0, 1 .$$

$$\text{Συνεπώς } {}_A R_{AA^c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Έστω  $i \in B \subseteq A^c$  και  $j \in A^c$ . Τότε ισχύει ότι

$$P[X_n = j, X_k \in A^c \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i] = q^{j-i} \binom{n}{j-i} p^{n-(j-i)}, \quad i \leq j$$

και αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} ({}_A R_{B A^c})_{ij} &= \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A^c \forall k \in \{1, \dots, n\} \mid X_0 = i] \\ &= q^{j-i} \sum_{n \geq j-i} \binom{n}{j-i} p^{n-(j-i)} \\ &= \frac{1}{q}, \quad \text{όταν } i \leq j \end{aligned}$$

$$({}_A R_{A A^c})_{ij} = 0, \quad \text{όταν } i > j.$$

Συνεπώς για  $B = \{3, 4\}$  ισχύει ότι  ${}_A R_{B A^c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} & \frac{1}{q} \end{bmatrix}$ . □

**Παρατήρηση 2.1.** Όπως φάνηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1  ${}_A R_{A^c A^c} = N_{A^c}$ . Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1 έχουμε ότι  ${}_A R_{A^c A^c} = N_{A^c} = (I - P_{A^c A^c})^{-1}$ .

Επιπλέον, επειδή ο πίνακας  ${}_A R_{BB}$  είναι υποπίνακας του  ${}_A R_{A^c A^c}$  περιορισμένος στο σύνολο  $B \subset A^c \subsetneq S$ , θα ισχύει ότι

$${}_A R_{BB} = ({}_A R_{A^c A^c})_{BB} = (N_{A^c})_{BB} = ((I - P_{A^c A^c})^{-1})_{BB}.$$

Θα φανεί ξεκάθαρα η χρήση των παραπάνω εννοιών και αποδείξεων καθώς θα δείξουμε στη συνέχεια ένα από τα βασικότερα θεωρήματα των πινακογεωμετρικών μεθόδων.

**Θεώρημα 2.2.** Έστω  $\{X_n \ n \geq 0\}$  μια αδιαχώριστη, απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων  $S$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  και έστω  $\pi$  η αντίστοιχη οριακή κατανομή. Έστω δύο ξένα σύνολα  $A$  και  $B$ , υποσύνολα του χώρου καταστάσεων  $S$  και  $\pi_A, \pi_B$  τα διανύσματα στάσιμων πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στα  $A, B$  αντίστοιχα. Τότε

$$\pi_B^T = \pi_A^T {}_A R_{AB}, \quad (2.5)$$

όπου  ${}_A R_{AB}$  είναι ο πίνακας που απεικονίζει τους μέσους χρόνους παραμονής σε καταστάσεις του συνόλου  $B$ , ξεκινώντας από καταστάσεις του συνόλου  $A$ , πριν η αλυσίδα επιστρέψει για πρώτη φορά σε καταστάσεις του  $A$ .

### Απόδειξη

Οι εξισώσεις ισορροπίας μας δίνουν  $\pi^T P = \pi^T \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_A^T & \pi_{A^c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{AA} & P_{AA^c} \\ P_{A^cA} & P_{A^cA^c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_A^T & \pi_{A^c}^T \end{pmatrix}$

$$\pi_A^T P_{AA} + \pi_{A^c}^T P_{A^cA} = \pi_A^T \quad (2.6)$$

$$\pi_A^T P_{AA^c} + \pi_{A^c}^T P_{A^cA^c} = \pi_{A^c}^T \quad (2.7)$$

Από την εξίσωση (2.7) έπεται ότι  $\pi_A^T P_{AA^c} + \pi_{A^c}^T (P_{A^cA^c} - I) = \mathbf{0} \Rightarrow \pi_A^T P_{AA^c} = \pi_{A^c}^T (I - P_{A^cA^c})$

$$\Rightarrow \pi_{A^c}^T = \pi_A^T P_{AA^c} (I - P_{A^cA^c})^{-1} .$$

Από το θεώρημα 2.1 και συγκεκριμένα από την σχέση ( 2.4 ) έπεται ότι

$$\pi_{A^c}^T = \pi_A^T P_{AA^c} (I - P_{A^cA^c})^{-1} = \pi_A^T {}_A R_{AA^c} . \quad (2.8)$$

Επιπλέον

$$\pi_B^T = (\pi_{A^c}^T)_B = (\pi_A^T {}_A R_{AA^c})_B = \pi_A^T {}_A R_{AB} . \quad \square$$

Προκειμένου να κάνουμε άμεση χρήση της θεμελιώδους σημασίας σχέσης ( 2.5 ) του Θεωρήματος 2.2 , θα πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα  ${}_A R_{AB}$  για οποιαδήποτε σύνολα  $A$  και  $B$ .

Έστω δύο ξένα σύνολα  $A$  και  $B$ , υποσύνολα του χώρου καταστάσεων. Για καθορισμένη κατάσταση  $j \in B$  θα ορίσουμε ως  ${}_A F_{ij}$  την πιθανότητα η αλυσίδα να εισέλθει στο σύνολο  $B$  σε πεπερασμένο χρόνο και η πρώτη είσοδος να γίνει στην κατάσταση  $j \in B$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $i$  και πριν περάσει για πρώτη φορά στο σύνολο  $A$ . Τότε

$${}_A F_{ij} = P [\varepsilon_B = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A \mid X_0 = i] .$$



**Θεώρημα 2.3.** Οι σχέσεις που ακολουθούν ισχύουν για οποιαδήποτε δύο ξένα υποσύνολα, έστω  $A$  και  $B$ , του χώρου καταστάσεων  $S$ .

$${}_A R_{AB} = {}_A F_{AB} {}_A R_{BB} \quad (2.9)$$

$${}_A R_{BB} = \sum_{n \geq 0} ({}_A F_{BB})^n = (I - {}_A F_{BB})^{-1} \quad (2.10)$$

### Απόδειξη

Η πρώτη εξίσωση εκφράζει ότι ο μέσος χρόνος παραμονής (το μέσο πλήθος επισκέψεων) σε καταστάσεις του συνόλου  $B$ , ξεκινώντας από καταστάσεις του συνόλου  $A$  και πριν η αλυσίδα επιστρέψει για πρώτη φορά σε καταστάσεις του  $A$  θα ισούται με την πιθανότητα σε πεπερασμένο χρόνο να φύγει από το σύνολο  $A$  και να εισέλθει το σύστημα σε κάποια κατάσταση του συνόλου  $B$  επί τον μέσο χρόνο παραμονής σε καταστάσεις μέσα στο σύνολο  $B$ , αποφεύγοντας το  $A$ .

Θα αποδείξουμε την εξίσωση σε επίπεδο στοιχείων.

Έστω  $i \in A$  και  $j \in B$  τότε η πρώτη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$${}_A R_{ij} = \sum_{k \in B} {}_A F_{ik} {}_A R_{kj} \quad (2.11)$$

Παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_{k \in B} \left( \{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A\} \cup \{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A\} \right) = \\ &= \bigcup_{k \in B} \left( \left( \{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A\} \cup \{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A\} \right) \cup \right. \\ &\quad \left. \cup \{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A\} \right) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
{}_A R_{ij} &= \sum_{n \geq 0} P [X_n = j, X_k \in A^c \forall k \in \{1, \dots, n\} | X_0 = i] \\
&= E [{}_A N_j | X_0 = i] \\
&= \sum_{k \in B} \left( E [{}_A N_j | X_0 = i, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] \right. \\
&\quad \cdot P [\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A | X_0 = i] \Big) \\
&\quad + \sum_{k \in B} \left( E [{}_A N_j | X_0 = i, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] \right. \\
&\quad \cdot P [\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A | X_0 = i] \Big) \\
&\quad + \sum_{k \in B} \left( E [{}_A N_j | X_0 = i, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A] \right. \\
&\quad \cdot P [\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A | X_0 = i] \Big) \\
&= \sum_{k \in B} E [{}_A N_j | X_0 = k] P [\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A | X_0 = i] \\
&= \sum_{k \in B} {}_A F_{ik} {}_A R_{kj} .
\end{aligned}$$

Εφόσον

- $E [{}_A N_j | X_0 = i, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] = E [{}_A N_j | X_0 = k]$ , δηλαδή το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , δεδομένου ότι η πρώτη είσοδος στο σύνολο  $B$  θα είναι στην κατάσταση  $k$ , ισούται με το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $k \in B$ .
- $E [{}_A N_j | X_0 = i, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] = 0$ , εφόσον η πρώτη είσοδος στο σύνολο  $B$  δεν γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο, το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , θα είναι 0.
- $E [{}_A N_j | X_0 = i, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A] = 0$ , εφόσον η πρώτη είσοδος στο σύνολο  $B$  γίνεται σε μεγαλύτερο χρόνο από την πρώτη είσοδο στο σύνολο  $A$ , το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , θα είναι 0.

Η δεύτερη εξίσωση  ${}_A R_{BB} = \sum_{n \geq 0} ({}_A F_{BB})^n = (I - {}_A F_{BB})^{-1}$  ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως

$${}_A R_{BB} = I + {}_A F_{BB} {}_A R_{BB} .$$

Θα την αποδείξουμε σε επίπεδο στοιχείων διακρίνοντας όμως δύο περιπτώσεις, όταν  $i = j$  και όταν  $i \neq j$ .

Στη περίπτωση που  $i = j$  αρκεί να δείξουμε ότι

$${}_A R_{jj} = 1 + \sum_{k \in B} {}_A F_{jk} {}_A R_{kj} .$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} {}_A R_{jj} &= \sum_{n \geq 0} P[X_n = j, X_k \in A^c \forall k \in \{1, \dots, n\} | X_0 = j] \\ &= E[{}_A N_j | X_0 = j] \\ &= \sum_{k \in B} \left( E[{}_A N_j | X_0 = j, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] \right. \\ &\quad \cdot P[\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A | X_0 = j]) \\ &\quad + \sum_{k \in B} \left( E[{}_A N_j | X_0 = j, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] \right. \\ &\quad \cdot P[\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A | X_0 = j]) \\ &\quad + \sum_{k \in B} \left( E[{}_A N_j | X_0 = j, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A] \right. \\ &\quad \cdot P[\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A | X_0 = j]) \\ &= 1 + \sum_{k \in B} E[{}_A N_j | X_0 = k] P[\varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A | X_0 = i] \\ &= 1 + \sum_{k \in B} {}_A F_{ik} {}_A R_{kj} . \end{aligned}$$

Εφόσον

- $E[{}_A N_j | X_0 = j, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] = 1 + E[{}_A N_j | X_0 = k]$ , δηλαδή το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , δεδομένου ότι η πρώτη επάνοδος στο σύνολο  $B$  θα είναι στην κατάσταση  $k$ , ισούται με τη μια επίσκεψη που καταγράφεται τη χρονική στιγμή 0 συν το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $k \in B$ .
- $E[{}_A N_j | X_0 = j, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B = \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A] = 1$ , εφόσον η πρώτη επάνοδος στο σύνολο  $B$  δεν γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο, το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , θα είναι 1.
- $E[{}_A N_j | X_0 = j, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B \leq \infty, \varepsilon_B \geq \varepsilon_A] = 1$ , εφόσον η πρώτη επάνοδος στο σύνολο  $B$  γίνεται σε μεγαλύτερο χρόνο από την πρώτη είσοδο στο σύνολο  $A$ , το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $j \in B$ , αποφεύγοντας το σύνολο  $A$ , θα είναι 1.

Στη περίπτωση που  $i \neq j$  αρκεί να δείξουμε ότι  ${}_A R_{ij} = \sum_{k \in B} {}_A F_{ik} {}_A R_{kj}$ , το οποίο όμως αποδεικνύεται προφανώς από την σχέση ( 2.11 ). □

**Παράδειγμα 2.3.** (Συνέχεια του παραδείγματος 2.2 )

$$({}_A F_{AA^c})_{ij} = P\{\varepsilon_{A^c} = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_{A^c} < \infty, \varepsilon_{A^c} < \varepsilon_A \mid X_0 = i\} = q, \text{ όταν } i = 2 \text{ και } j = 3$$

$$({}_A F_{AA^c})_{ij} = P\{\varepsilon_{A^c} = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_{A^c} < \infty, \varepsilon_{A^c} < \varepsilon_A \mid X_0 = i\} = 0, \text{ διαφορετικά.}$$

$$\text{Συνεπώς } {}_A F_{AA^c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω  $B \subset A^c$ ,

$$({}_A F_{BB})_{ij} = P\{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A \mid X_0 = i\} = p, \text{ όταν } i = j$$

$$({}_A F_{BB})_{ij} = P\{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A \mid X_0 = i\} = q, \text{ όταν } j = i + 1$$

$$({}_A F_{BB})_{ij} = P\{\varepsilon_B = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A \mid X_0 = i\} = 0, \text{ διαφορετικά.}$$

Συνεπώς για  $B = A^c$  θα ισχύει ότι

$${}_A F_{A^c A^c} = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

□

**Παρατήρηση 2.2.** Αποδείξαμε στο θεώρημα 2.3 ότι ο πίνακας  ${}_A R_{AB}$  δίνεται συναρτήσει του πίνακα  ${}_A R_{BB}$ , για τον οποίο γνωρίζουμε από την παρατήρηση 2.1 και το λήμμα 2.1, ότι

$${}_A R_{BB} = ({}_A R_{A^c A^c})_{BB} = (N_{A^c})_{BB} = ((I - P_{A^c A^c})^{-1})_{BB} = \sum_{n \geq 0} (P_{A^c A^c}^n)_{BB}.$$

Επιπλέον, στο θεώρημα 2.3 δείξαμε ότι  ${}_A R_{BB} = \sum_{n \geq 0} ({}_A F_{BB})^n$  συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις γίνεται σαφές ότι

$$(P_{A^c A^c}^n)_{BB} = ({}_A F_{BB})^n, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Επίσης προφανώς ισχύει ότι  $P_{AA^c} = {}_A F_{AA^c}$ .

Ένα ακόμη αποτέλεσμα που θα φανεί ιδιαίτερος χρήσιμο στη συνέχεια είναι το εξής. Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του χώρου καταστάσεων  $S$ , θα ορίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να εισέλθει για πρώτη φορά στο σύνολο  $A$  σε πεπερασμένο χρόνο, στην κατάσταση  $j \in A$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $i$ , και θα την συμβολίσουμε με  $F_{ij}$ . Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα  $F_{ij}$  εξαρτάται από την κατάσταση  $i$  και συνεπώς εξαρτάται από το σύνολο στο οποίο ανήκει η κατάσταση αυτή. Οι πιθανότητες πρώτης εισόδου δίνονται από τη σχέση

$$F_{ij} = P [ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty \mid X_0 = i ] .$$

Θα υπολογίσουμε, στη συνέχεια, τις ποσότητες αυτές για τις διάφορες καταστάσεις  $i$ .

**Λήμμα 2.2.** Οι σχέσεις που ακολουθούν ισχύουν για οποιαδήποτε δύο ξένα υποσύνολα, έστω  $A$  και  $B$ , του χώρου καταστάσεων  $S$ ,

$$F_{BA} = (I - {}_A F_{BB})^{-1} {}_B F_{BA} = {}_A R_{BB} {}_B F_{BA} , \quad (2.12)$$

$$F_{A^c A} = (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A} = N_{A^c} P_{A^c A} , \quad (2.13)$$

όπου ο πίνακας  $F_{BA}$  περιέχει τις πιθανότητες πρώτης εισόδου στις καταστάσεις του συνόλου  $A$ , ξεκινώντας από το σύνολο  $B$ .

### Απόδειξη

Η σχέση ( 2.12 ) ισοδύναμα γράφεται

$$F_{BA} = (I - {}_A F_{BB})^{-1} {}_B F_{BA} \Leftrightarrow F_{BA} = {}_B F_{BA} + {}_A F_{BB} F_{BA} .$$

Εκφράζει ότι ξεκινώντας από μια κατάσταση του συνόλου  $B$  μπορούν να συμβούν δύο ακριβώς πράγματα. Είτε η αλυσίδα εισέρχεται στο σύνολο  $A$  πριν επιστρέψει στο σύνολο  $B$ , είτε παραμένει στο σύνολο  $B$ , πριν εισέλθει στο  $A$ , στην περίπτωση αυτή θα πρέπει πάλι να εισέλθει στο σύνολο  $A$  από το σύνολο  $B$ .

Θα αποδείξουμε την εξίσωση ( 2.12 ) σε επίπεδο στοιχείων.

Έστω  $i \in B$  και  $j \in A$  τότε η σχέση ( 2.12 ) ισοδύναμα γράφεται  $F_{ij} = {}_B F_{ij} + \sum_{k \in B} {}_A F_{ik} F_{kj}$ .

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= P \left[ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty \mid X_0 = i \right] \\
&= P \left[ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A < \varepsilon_B \mid X_0 = i \right] \\
&\quad + P \left[ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A \geq \varepsilon_B \mid X_0 = i \right] \\
&= {}_B F_{ij} + P \left[ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A \geq \varepsilon_B \mid X_0 = i \right] \\
&= {}_B F_{ij} + \sum_{k \in B} P \left[ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A > \varepsilon_B, \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}} \mid X_0 = i \right] \\
&= {}_B F_{ij} + \sum_{k \in B} P \left[ \varepsilon_B = \varepsilon_{\{k\}}, \varepsilon_B < \infty, \varepsilon_B < \varepsilon_A \mid X_0 = i \right] \cdot \\
&\quad \cdot P \left[ \varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty \mid X_0 = k \right] \\
&= {}_B F_{ij} + \sum_{k \in B} {}_A F_{ik} F_{kj} .
\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που  $B = A^c$  η σχέση ( 2.12 ) γίνεται

$$F_{A^c A} = (I - {}_A F_{A^c A^c})^{-1} {}_A F_{A^c A}$$

όμως από την παρατήρηση 2.2 ισχύει ότι  ${}_A F_{A^c A^c} = P_{A^c A^c}$ , επιπλέον ισχύει ότι  ${}_A F_{A^c A} = P_{A^c A}$  συνεπώς

$$F_{A^c A} = (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A} = N_{A^c} P_{A^c A} . \quad \square$$

**Παράδειγμα 2.4.** (Συνέχεια του παραδείγματος 2.3 )

Έστω  $i \in A$  τότε αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
(F_{AA^c})_{i3} &= P[\varepsilon_{A^c} = \varepsilon_{\{3\}}, \varepsilon_{A^c} < \infty \mid X_0 = i] \\
&= q^{3-i} + (3-i)pq^{3-i} + \frac{(3-i)(4-i)}{2} p^2 q^{3-i} + \dots \\
&= q^{3-i} \sum_{n \geq 3-i} \binom{n-1}{2-i} p^{n-(3-i)} = 1
\end{aligned}$$

$$(F_{AA^c})_{ij} = 0, \quad \forall j \neq 3$$

$$\text{Συνεπώς } F_{AA^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad \square$$

Το θεώρημα 2.2 μας λέει πως να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή  $\pi$  συναρτήσει της στάσιμης κατανομής  $\pi_A$  σε ένα σύνολο  $A$ , υποσύνολο του χώρου καταστάσεων  $S$ . Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο πως μπορούμε να υπολογίσουμε την  $\pi_A$ .

## 2.2 Λογοκριμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Ορίζουμε τις χρονικές στιγμές που οριοθετούν διαδοχικές επισκέψεις στο σύνολο  $A$  ως την ακολουθία  $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots\}$ , όπου  $\tau_n$  είναι η  $n$ -οστή χρονική στιγμή που η αλυσίδα βρίσκεται σε κάποια από τις καταστάσεις του συνόλου  $A$ .

Συγκεκριμένα

$$\tau_0 = \inf \{i \geq 0 : X_i \in A\}$$

$$\tau_{n+1} = \inf \{i \geq \tau_n + 1 : X_i \in A\}, \quad n \geq 0.$$

**Ορισμός 2.1.** Έστω  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων  $S$ , πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  και έστω  $A \subsetneq S$ . Η  $A$ -λογοκριμένη διαδικασία της  $X_n$ , την οποία συμβολίζουμε με  $\{X_n^A, n \in \mathbb{N}_0\}$ , ορίζεται ως :

$$X_n^A = X_{\tau_n}, \quad \text{για } n \geq 0$$

έτσι ώστε η  $X_n^A$  να εκφράζει την κατάσταση που βρίσκεται η Μαρκοβιανή διαδικασία κατά τη  $n$ -οστή επίσκεψη στο σύνολο  $A$ .

**Θεώρημα 2.4.** Έστω  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  μια αδιαχώριστη, ομογενής, θετικά επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων  $S$ , με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  και στάσιμη κατανομή  $\pi$ . Έστω  $A \subsetneq S$ . Ο χώρος καταστάσεων  $S$  διαμερίζεται στα δύο ξένα σύνολα  $A$  και  $A^c$ . Τότε η  $A$ -λογοκριμένη διαδικασία  $\{X_n^A, n \in \mathbb{N}_0\}$  είναι αδιαχώριστη, ομογενής, θετικά επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο  $A$ , με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P(A) = P_{AA} + P_{AA^c}(I - P_{A^cA^c})^{-1}P_{A^cA}$$

και η στάσιμη κατανομή της είναι η  $\pi_A$  κανονικοποιημένη στο  $A$ , δηλαδή

$$\pi_A^T = \pi_A^T P(A).$$

### Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι οι διαδοχικοί χρόνοι  $\{\tau_n, n \geq 0\}$  είναι χρόνοι διακοπής, εφόσον το ενδεχόμενο  $\{\tau_n = n\}$ , όπου  $n \in \mathbb{N}_0$ , καθορίζεται πλήρως από την ιστορία του συστήματος μέχρι τη στιγμή  $n$ , και δεν απαιτείται πρόγνωση του μέλλοντος. Από το συμπέρασμα αυτό, σε συνδυασμό με την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα, έπεται άμεσα ότι η  $A$ -λογοκριμένη διαδικασία  $\{X_n^A, n \in \mathbb{N}_0\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα.



Έστω  $i, j \in A$  τότε

$$\begin{aligned}
(P(A))_{ij} &= P[X_{\tau_1} = j | X_0 = i] = P[\varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty | X_0 = i] \\
&= P[\varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A < \varepsilon_{A^c} | X_0 = i] \\
&\quad + P[\varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A \geq \varepsilon_{A^c} | X_0 = i] \\
&= {}_{A^c}F_{ij} + P[\varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A \geq \varepsilon_{A^c} | X_0 = i] \\
&= {}_{A^c}F_{ij} + \sum_{l \in A^c} P[\varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty, \varepsilon_A > \varepsilon_{A^c}, \varepsilon_{A^c} = \varepsilon_{\{l\}} | X_0 = i] \\
&= {}_{A^c}F_{ij} + \sum_{l \in A^c} (P[\varepsilon_{A^c} = \varepsilon_{\{l\}}, \varepsilon_{A^c} < \infty, \varepsilon_{A^c} < \varepsilon_A | X_0 = i] \\
&\quad \cdot P[\varepsilon_A = \varepsilon_{\{j\}}, \varepsilon_A < \infty | X_0 = l]) \\
&= {}_{A^c}F_{ij} + \sum_{l \in A^c} {}_A F_{il} F_{lj} ,
\end{aligned}$$

δηλαδή, η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$ , κοιτώντας μόνο το σύνολο  $A$ , υπολογίζεται αν λάβουμε υπόψη μας ότι είτε η αλυσίδα μπορεί να μεταβεί απευθείας από την  $i$  στην  $j$ , είτε μπορεί να μεταβεί σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του  $A$  και στη συνέχεια η πρώτη είσοδος στο σύνολο αυτό να γίνει σε πεπερασμένο χρόνο και στην κατάσταση  $j$ . Σε επίπεδο πινάκων η τελευταία σχέση γράφεται

$$P(A) = {}_{A^c}F_{AA} + {}_A F_{AA^c} F_{A^c A}$$

ή ισοδύναμα

$$P(A) = P_{AA} + P_{AA^c} F_{A^c A} .$$

Από το Λήμμα 2.2 , και συγκεκριμένα από την σχέση ( 2.13 ), έχουμε ότι

$$F_{A^c A} = (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A} = N_{A^c} P_{A^c A} .$$

Έπεται άμεσα, λοιπόν, ότι

$$P(A) = P_{AA} + P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A} .$$

Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα την τελευταία εξίσωση με το διάνυσμα της στάσιμης κατανομής  $\pi_A$  προκύπτει ότι

$$\pi_A^T P(A) = \pi_A^T [P_{AA} + P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A}] = \pi_A^T P_{AA} + \pi_A^T P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A} .$$

Από την σχέση ( 2.8 ), της απόδειξης του θεωρήματος 2.2 , δηλαδή ότι  $\pi_{A^c}^T = \pi_A^T P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1}$  έχουμε ότι

$$\pi_A^T P(A) = \pi_A^T P_{AA} + \pi_A^T P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A} = \pi_A^T P_{AA} + \pi_{A^c}^T P_{A^c A}$$

και άρα συνδυάζοντας την παραπάνω εξίσωση με την σχέση ( 2.6 ), της απόδειξης του θεωρήματος 2.2 , δηλαδή ότι  $\pi_A^T P_{AA} + \pi_{A^c}^T P_{A^c A} = \pi_A^T$  έπεται άμεσα το ζητούμενο.  $\square$

Το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να γενικευθεί ως εξής.

**Θεώρημα 2.5.** Θεωρούμε δυο ξένα σύνολα,  $A$  και  $B$ , υποσύνολα του χώρου καταστάσεων  $S$ . Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της  $A$ -λογοκριμένη Μαρκοβιανής αλυσίδας ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} P(A) &= {}_B F_{AA} + {}_A F_{AB} \sum_{\nu \geq 0} ({}_A F_{BB})^\nu {}_B F_{BA} \\ &= {}_B F_{AA} + {}_A F_{AB} (I - {}_A F_{BB})^{-1} {}_B F_{BA} \\ &= {}_B F_{AA} + {}_A F_{AB} {}_A R_{BB} {}_B F_{BA} \\ &= {}_B F_{AA} + {}_A F_{AB} F_{BA} . \end{aligned}$$

## 2.3 Ο αλγόριθμος GTH

Η παράγραφος αυτή αναφέρεται στην εύρεση της στάσιμης κατανομής μιας πεπερασμένης, αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου. Έστω ότι ο χώρος καταστάσεων είναι  $S = \{0, 1, \dots, N\}$ . Αρχικά διαμερίζουμε τον χώρο καταστάσεων θεωρώντας το σύνολο  $A_0 = \{0\}$  και το συμπληρωματικό του  $A_0^c = \{1, 2, \dots, N\}$ , καθώς και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης σε τέσσερα μπλόκ πινάκων

$$P = (p_{ij})_{i,j \in S} = \begin{bmatrix} P_{A_0 A_0} & P_{A_0 A_0^c} \\ P_{A_0^c A_0} & P_{A_0^c A_0^c} \end{bmatrix}.$$

Ανάλογα, το διάνυσμα  $\pi$  γράφεται σαν  $\pi^T = \begin{pmatrix} \pi_{A_0}^T & \pi_{A_0^c}^T \end{pmatrix}$ .

Τότε από το θεώρημα 2.2 και συγκεκριμένα από τη σχέση ( 2.5 ) έπεται ότι  $\pi_{A_0}^T = \pi_{A_0^c}^T R_{A_0^c A_0}$ , όμως  $A_0^c R_{A_0^c A_0} = P_{A_0^c A_0} (I - P_{A_0 A_0})^{-1}$  από τη σχέση ( 2.4 ) του θεωρήματος 2.1 , οπότε τελικά έχουμε ότι

$$\pi_0^T = \pi_{A_0}^T = \pi_{A_0^c}^T P_{A_0^c A_0} (I - P_{A_0 A_0})^{-1}$$

συνεπώς το διάνυσμα  $\pi_{A_0}^T$  που αναφέρεται στην κατάσταση 0, εκφράζεται συναρτήσει του διανύσματος  $\pi_{A_0^c}^T$ , που αναφέρεται στις καταστάσεις  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

Από το θεώρημα 2.4 έπεται ότι το διάνυσμα  $\pi_{A_0^c}^T$  βρίσκεται ως

$$\pi_{A_0^c}^T = \pi_{A_0^c}^T P(A_0^c) ,$$

όπου  $P(A_0^c) = P_{A_0^c A_0^c} + P_{A_0^c A_0} (I - P_{A_0 A_0})^{-1} P_{A_0 A_0^c}$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Λογοκρινόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας επί του συνόλου  $\{1, 2, \dots, N\}$  και αποτελεί αδιαχώριστο στοχαστικό πίνακα.

Μπορούμε στη συνέχεια να διαμερίσουμε το σύνολο  $\{1, 2, \dots, N\}$  στα επιμέρους σύνολα  $A_1 = \{1\}$  και  $A_1^c = \{2, \dots, N\}$  και επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία να βρούμε μια σχέση για το διάνυσμα  $\pi_{A_1}^T$ , που αναφέρεται στην κατάσταση 1, συναρτήσει του διανύσματος  $\pi_{A_1^c}^T$ , που αναφέρεται στις καταστάσεις  $\{2, \dots, N\}$ , κ.ο.κ..

Μια ισοδύναμη τεχνική προκύπτει λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} \pi^T (P - I) &= \mathbf{0} \text{ και} \\ \pi^T \mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss. Ο πίνακας  $P - I$  αναλύεται σε γινόμενο δύο πινάκων  $LU$ , όπου ο πίνακας  $U$  είναι αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός και ο  $L$  της μορφής

$$L = \begin{bmatrix} L_* & \mathbf{0} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix},$$

και  $L_*$  ένας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός πίνακας. Εφόσον ο πίνακας  $U$  είναι αντιστρέψιμος το παραπάνω σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \pi^T L &= \mathbf{0} \\ \pi^T \mathbf{1} &= 1. \end{aligned}$$

Διαμερίζουμε όπως πριν τον πίνακα  $P - I$  σε τέσσερα μπλόκ πινάκων

$$P - I = \begin{bmatrix} P_{A_0 A_0} - 1 & P_{A_0 A_0^c} \\ P_{A_0^c A_0} & P_{A_0^c A_0^c} - I \end{bmatrix},$$

όπου  $A_0 = \{0\}$  και  $A_0^c = \{1, 2, \dots, N\}$ . Παρατηρούμε ότι  $P_{A_0 A_0} - 1 \neq 0$  εφόσον η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και άρα το στοιχείο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πιλότος για να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Μετά από πράξεις ο πίνακας που θα προκύψει θα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} P_{A_0 A_0} - 1 & \mathbf{0} \\ P_{A_0^c A_0} & P(A_0^c) - I \end{bmatrix},$$

όπου η πρώτη στήλη του πίνακα θα είναι ίση με την πρώτη στήλη του πίνακα  $L$ .

Αναφέραμε προηγουμένως ότι ο πίνακας  $P(A_0^c)$  είναι αδιαχώριστος και άρα το στοιχείο  $(P(A_0^c))_{11}$  θα είναι διάφορο της μονάδας και συνεπώς μπορεί να αποτελέσει πιλότο προκειμένου την επανάληψη της προηγούμενης διαδικασίας. Ορίζουμε τα σύνολα  $A_1 = \{1\}$  και  $A_1^c = \{2, 3, \dots, N\}$  και αναλύουμε τον πίνακα  $P(A_0^c) - I$  σε τέσσερα μπλόκ πινάκων. Τότε έχουμε τον  $(3 \times 3)$  μπλοκ πίνακα

$$\begin{bmatrix} P_{A_0 A_0} - 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_{A_1 A_0} & (P(A_0^c))_{A_1 A_1} - 1 & (P(A_0^c))_{A_1 A_1^c} \\ P_{A_1^c A_0} & (P(A_0^c))_{A_1^c A_1} & (P(A_0^c))_{A_1^c A_1^c} - I \end{bmatrix}.$$

Μετά από πράξεις ο πίνακας που θα προκύψει θα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} P_{A_0A_0} - 1 & 0 & \mathbf{0} \\ P_{A_1A_0} & (P(A_0^c))_{A_1A_1} - 1 & \mathbf{0} \\ P_{A_1^cA_0} & (P(A_0^c))_{A_1^cA_1} & P(A_1^c) - I \end{bmatrix},$$

όπου  $P(A_1^c) = (P(A_0^c))_{A_1^cA_1} + (P(A_0^c))_{A_1A_1} (I - (P(A_0^c))_{A_1A_1})^{-1} (P(A_0^c))_{A_1A_1^c}$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Λογοκρμμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας επί του συνόλου  $\{2, 3, \dots, N\}$  και αποτελεί αδιαχώριστο στοχαστικό πίνακα.

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία στο  $i + 1$ -οστό βήμα θα προκύψει ένας πίνακας της μορφής

$$\begin{bmatrix} P_{A_0A_0} - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ P_{A_1A_0} & (P(A_0^c))_{A_1A_1} - 1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ P_{A_2A_0} & (P(A_0^c))_{A_2A_1} & (P(A_1^c))_{A_2A_2} - 1 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{A_iA_0} & (P(A_0^c))_{A_iA_1} & (P(A_1^c))_{A_iA_2} & \dots & (P(A_{i-1}^c))_{A_iA_i} - 1 & \mathbf{0} \\ P_{A_i^cA_0} & (P(A_0^c))_{A_i^cA_1} & (P(A_1^c))_{A_i^cA_2} & \dots & (P(A_{i-1}^c))_{A_i^cA_i} & P(A_i^c) - I \end{bmatrix},$$

όπου  $P(A_i^c) = (P(A_{i-1}^c))_{A_i^cA_i} + (P(A_{i-1}^c))_{A_iA_i} (I - (P(A_{i-1}^c))_{A_iA_i})^{-1} (P(A_{i-1}^c))_{A_iA_i^c}$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Λογοκρμμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας επί του συνόλου  $\{i + 1, i + 2, \dots, N\}$  και αποτελεί αδιαχώριστο στοχαστικό πίνακα. Οι  $i + 1$  πρώτες στήλες του πίνακα θα είναι ίσες με τις  $i + 1$  πρώτες στήλες του πίνακα  $L = (\ell_{ij})_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}}$ .

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \ell_{i0} &= P_{A_iA_0} - \delta_{i0}, \quad 0 \leq i \leq N, \\ \ell_{ij} &= (P(A_{j-1}^c))_{A_iA_j} - \delta_{ij}, \quad 1 \leq j < N, j \leq i \leq N, \\ \ell_{ij} &= 0, \quad 1 \leq j \leq N, 0 \leq i < j, i = j = N, \end{aligned}$$

όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j. \end{cases}$$

Το σύστημα  $\pi^T L = \mathbf{0}$  ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \pi_{N-1} &= -\pi_N \frac{\ell_{N,N-1}}{\ell_{N-1,N-1}} \\ \pi_{N-2} &= -\pi_{N-1} \frac{\ell_{N-1,N-2}}{\ell_{N-2,N-2}} - \pi_N \frac{\ell_{N,N-2}}{\ell_{N-2,N-2}} \\ \pi_{N-3} &= -\pi_{N-2} \frac{\ell_{N-2,N-3}}{\ell_{N-3,N-3}} - \pi_{N-1} \frac{\ell_{N-1,N-3}}{\ell_{N-3,N-3}} - \pi_N \frac{\ell_{N,N-3}}{\ell_{N-3,N-3}} \\ &\vdots \\ \pi_i &= -\sum_{j=i+1}^N \pi_j \frac{\ell_{ji}}{\ell_{ii}}, \quad 0 \leq i \leq N-1. \end{aligned}$$

Το μόνο που υπολείπεται είναι η εύρεση της ακριβούς μορφής των στοιχείων

$$\ell_{ij} = (P(A_{j-1}^c))_{A_i A_j} - \delta_{ij}, \quad 1 \leq j < N, \quad j \leq i \leq N.$$

Από την σχέση  $P(A_0^c) = P_{A_0^c A_0^c} + P_{A_0^c A_0} (1 - P_{A_0 A_0})^{-1} P_{A_0 A_0^c}$  είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$(P(A_0^c))_{ij} = p_{ij}^{(0)} = p_{ij} + \frac{1}{1 - p_{00}} p_{i0} p_{0j}, \quad i, j \in A_0^c.$$

Από την σχέση  $P(A_1^c) = (P(A_0^c))_{A_1^c A_1^c} + (P(A_0^c))_{A_1^c A_1} (1 - (P(A_0^c))_{A_1 A_1})^{-1} (P(A_0^c))_{A_1 A_1^c}$  είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$(P(A_1^c))_{ij} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(0)} + \frac{1}{1 - p_{11}} p_{i1}^{(0)} p_{1j}^{(0)}, \quad i, j \in A_1^c.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$(P(A_n^c))_{ij} = p_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n-1)} + \frac{1}{1 - p_{nn}} p_{in}^{(n-1)} p_{nj}^{(n-1)}, \quad 1 \leq n < N-1, \quad i, j \in A_n^c.$$

## Αλγόριθμος GTH

1<sup>ο</sup> βήμα : Υπολογισμός των  $1 - p_{ii} = \sum_{j \neq i} p_{ij}$  ,  $0 \leq i \leq N$  .

2<sup>ο</sup> βήμα : Υπολογισμός των  $p_{ij}^{(n)}$  = 
$$\begin{cases} p_{ij}^{(n-1)} + \frac{1}{1-p_{nn}} p_{in}^{(n-1)} p_{nj}^{(n-1)} , & 1 \leq n < N - 1, i, j \in A_n^c \\ p_{ij} + \frac{1}{1-p_{00}} p_{i0} p_{0j} , & 0 \leq i \leq N , n = 0, i, j \in A_0^c \end{cases}$$

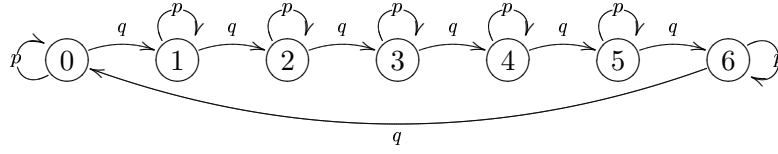
3<sup>ο</sup> βήμα : Θέτουμε  $l_{ij} = \begin{cases} p_{i0} - \delta_{i0} , & j = 0, 0 \leq i \leq N \\ p_{ij}^{(j-1)} - \delta_{ij} , & 1 \leq j < N, j \leq i \leq N \\ 0 , & 1 \leq j \leq N, 0 \leq i < j, i = j = N \end{cases}$

4<sup>ο</sup> βήμα : Θέτουμε  $\pi_N = 1$  .

5<sup>ο</sup> βήμα : Υπολογισμός των  $\pi_i = - \sum_{j=i+1}^N \pi_j \frac{l_{ji}}{l_{ii}}$  ,  $i = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0$  .

6<sup>ο</sup> βήμα : Κανονικοποιούμε τα  $\pi_i$  ,  $0 \leq i \leq N$  .

Παράδειγμα 2.5. (Συνέχεια του παραδείγματος 2.4 )



Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p_{j,j} &= p, & 0 \leq j \leq N \\ p_{j-1,j} &= q, & 1 \leq j \leq N \\ p_{60} &= q. \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες  $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n-1)} + \frac{1}{1-p_{nn}} p_{in}^{(n-1)} p_{nj}^{(n-1)}$ ,  $1 \leq n \leq N-2$ ,  $n \leq i, j \leq N$ .

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(0)} &= p_{ij} + \frac{1}{1-p_{00}} p_{i0} p_{0j} = \begin{cases} p_{ij}, & i \neq 6, j \neq 1, 1 \leq i, j \leq 6 \\ q, & i = 6, j = 1 \end{cases} \\ p_{ij}^{(1)} &= p_{ij}^{(0)} + \frac{1}{1-p_{11}} p_{i1}^{(0)} p_{1j}^{(0)} = \begin{cases} p_{ij}, & i \neq 6, j \neq 2, 2 \leq i, j \leq 6 \\ q, & i = 6, j = 2 \end{cases} \\ &\vdots \\ p_{ij}^{(4)} &= p_{ij}^{(3)} + \frac{1}{1-p_{44}} p_{i4}^{(3)} p_{4j}^{(3)} = \begin{cases} p_{ij}, & i \neq 6, j \neq 5, 5 \leq i, j \leq 6 \\ q, & i = 6, j = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\ell_{ij} = \begin{cases} p_{i0} - \delta_{i0}, & j = 0, 0 \leq i \leq 6 \\ p_{ij}^{(j-1)} - \delta_{ij}, & 1 \leq j < 6, j \leq i \leq 6 \\ 0, & 1 \leq j \leq 6, 0 \leq i < j, i = j = 6 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$L = \begin{bmatrix} p-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-1 & 0 \\ q & q & q & q & q & q & 0 \end{bmatrix}$$



Είναι εύκολο να δειχθεί ότι  $\pi_i = \pi_{i+1}$  για κάθε  $0 \leq i < 6$ . Θέτουμε  $\pi_6 = 1$  και άρα  $\pi_i = 1$  για κάθε  $0 \leq i \leq 6$ . Από την εξίσωση κανονικοποίησης προφανώς έπεται ότι  $\pi_i = \frac{1}{7}$  για κάθε  $0 \leq i \leq 6$ .



## Κεφάλαιο 3

# Ομογενείς αλυσίδες τύπου QBD

Θα αναλύσουμε τη στάσιμη κατανομή μιας εργοδικής αλυσίδας τύπου QBD και θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που εξήχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο, ότι η στάσιμη κατανομή είναι πινακογεωμετρική, για την ακρίβεια θα δείξουμε ότι είναι της μορφής  $\pi_n^T = \pi_{n-1}^T R$ , όπου  $\pi_{n-1}$  και  $\pi_n$  είναι τα διανύσματα των στάσιμων κατανομών που αντιστοιχούν στα επίπεδα  $n$  και  $n-1$ , αντίστοιχα, και  $R$  είναι ο πίνακας taboo των μέσων αριθμών επισκέψεων στις διάφορες καταστάσεις ενός επιπέδου, ξεκινώντας από τις καταστάσεις του αμέσως χαμηλότερου επιπέδου μέχρι την επιστροφή σε αυτό.

Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διδιάστατο χώρο καταστάσεων  $S = \{(n, i) : n \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$  τον οποίο θα διαμερίσουμε ως  $S = \bigcup_{n \geq 0} \ell(n)$ , όπου  $\ell(n) = \{(n, 1), (n, 2), \dots, (n, m)\}$ ,  $n \geq 0$ . Η πρώτη συντεταγμένη  $n$  θα αναφέρεται ως επίπεδο, ενώ η δεύτερη συντεταγμένη  $j$  θα αναφέρεται ως φάση της κατάστασης  $(n, j)$ . Σε πολλές περιπτώσεις θα καλούμε το σύνολο  $\ell(n)$  ως επίπεδο. Το πλήθος  $m$  των φάσεων κάθε επιπέδου μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο, είτε άπειρο.

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται τύπου QBD όταν είναι δυνατές μεταβάσεις μόνο από ένα επίπεδο στα γειτονικά του ή μέσα στο ίδιο επίπεδο, δηλαδή από μια κατάσταση  $(n, j)$  μεταβάσεις είναι δυνατές στις καταστάσεις  $(n, j')$ ,  $(n+1, j')$  ή  $(n-1, j')$ , στην τελευταία περίπτωση θα πρέπει προφανώς  $n \geq 1$ .

Περιοριζόμαστε στη μελέτη (χωρικά) ομογενών QBD, δηλαδή υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες του επιπέδου. Για την ακρίβεια, έστω δύο επίπεδα  $n$  και  $n'$  μεγαλύτερα ή ίσα του 1. Τότε η πιθανότητα  $P[X_1 = (n', j') \mid X_0 = (n, j)]$  εξαρτάται από τα  $i, j$  και  $n' - n$ , αλλά όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των  $n'$  και  $n$ . Συνεπώς ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα αποτελείται από μπλοκ

πινάκων σε τριδιαγώνια μορφή και θα είναι

$$P = \begin{bmatrix} B & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου οι πίνακες  $A_0, A_1, A_2$  και  $B$  θα είναι τετραγωνικοί ( $m \times m$ ).

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι η διαδικασία είναι αδιαχώριστη και άρα ανά δυο όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν.

### 3.1 Ορισμοί και στάσιμη κατανομή QBD αλυσίδων

Θα υποθέσουμε αρχικά ότι η διαδικασία τύπου QBD είναι απεριοδική και θετικά επαναληπτική. Έστω  $\pi$  η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας, που προκύπτει ως η μοναδική λύση του συστήματος  $\pi^T = \pi^T P$ ,  $\pi^T \mathbf{1} = 1$ .

Διαμερίζουμε το διάνυσμα  $\pi^T$ , ως προς τα διάφορα επίπεδα, στα διανύσματα  $\pi_n^T$ ,  $n \geq 0$ , όπου το κάθε διάνυσμα  $\pi_n^T$  έχει  $m$  συνεταγμένες. Συνεπώς το σύστημα  $\pi^T = \pi^T P$  παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \pi_0^T (B - I) + \pi_1^T A_2 &= 0 \\ \pi_{n-1}^T A_0 + \pi_n^T (A_1 - I) + \pi_{n+1}^T A_2 &= 0, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

ενώ η εξίσωση κανονικοποίησης  $\pi^T \mathbf{1} = 1$  γράφεται ως

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n^T \mathbf{1} = 1.$$

**Θεώρημα 3.1.** Έστω μια θετικά επαναληπτική διαδικασία τύπου QBD. Τότε υπάρχει ένας μη αρνητικός πίνακας  $N$  τετραγωνικός ( $m \times m$ ) τέτοιος ώστε

$$\pi_{n+1}^T = \pi_n^T A_0 N, \quad n \geq 0.$$

Το στοιχείο  $N_{ij}$  του πίνακα  $N$ , όπου  $1 \leq i, j \leq m$ , απεικονίζει τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση  $(n, j)$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $(n, i)$ , πριν η αλυσίδα επισκεφτεί για πρώτη φορά

κάποια από τις καταστάσεις του επιπέδου  $\ell(n-1)$  και είναι ανεξάρτητο από το  $n \geq 1$ .

Επίσης ισχύει

$$\pi_n^T = \pi_0^T R^n \quad n \geq 0 \quad (3.1)$$

όπου  $R = A_0 N$  και το στοιχείο  $R_{ij}$  του πίνακα  $R$ , όπου  $1 \leq i, j \leq m$ , είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση  $(n+1, j)$ , πριν η αλυσίδα επισκεφτεί για πρώτη φορά κάποια από τις καταστάσεις του συνόλου  $\ell(0) \cup \dots \cup \ell(n)$ , δεδομένου ότι ξεκινάει από την κατάσταση  $(n, i)$ .

### Απόδειξη

Για σταθερό αλλά αυθαίρετο  $n$  διαμερίζουμε τον χώρο καταστάσεων σε δύο σύνολα, έστω  $S = A \cup A^c$ , όπου  $A = \ell(0) \cup \dots \cup \ell(n)$  και  $A^c = \ell(n+1) \cup \ell(n+2) \cup \dots$ . Παρατηρούμε, ακολουθώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου, ότι

$$P_{A^c A^c} = \begin{bmatrix} A_1 & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{A A^c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}.$$

Από το θεώρημα 2.2 έχουμε ότι  $\pi_{A^c}^T = \pi_A^T A R_{A A^c}$ . Σε συνδυασμό με το θεώρημα 2.3, από το οποίο έχουμε ότι  $A R_{A A^c} = F_{A A^c} A R_{A^c A^c} = P_{A A^c} N_{A^c} = P_{A A^c} \sum_{n \geq 0} (P_{A^c A^c})^n = P_{A A^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1}$ , έπεται ότι

$$\pi_{A^c}^T = \pi_A^T P_{A A^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1}$$

ισοδύναμα σε αναλυτική μορφή έχουμε ότι

$$(\pi_{n+1}^T, \pi_{n+2}^T, \dots) = (\pi_0^T, \dots, \pi_n^T) P_{A A^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1}$$

όπου η σειρά  $\sum_{n \geq 0} (P_{A^c A^c})^n = (I - P_{A^c A^c})^{-1} = N_{A^c}$  συγκλίνει, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η αλυσίδα τύπου QBD είναι αδιαχώριστη.

Σπάζοντας τον πίνακα  $N_{A^c} = (I - P_{A^c A^c})^{-1}$  σε μπλοκ πινάκων της μορφής  $\{N_{kk'} : k, k' \geq 1\}$ , δηλαδή

$$N_{A^c} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots \\ N_{21} & N_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου  $\{N_{kk'}\}$  είναι ο πίνακας του αναμενόμενου πλήθους επισκέψεων στις διάφορες καταστάσεις του επιπέδου  $\ell(n + k')$ , ξεκινώντας από το επίπεδο  $\ell(n + k)$ , πριν η αλυσίδα μεταβεί σε καταστάσεις του συνόλου  $A = \ell(0) \cup \dots \cup \ell(n)$ .

Συνοπώς

$$\begin{aligned}
 P_{AA^c}(I - P_{A^cA^c})^{-1} &= P_{AA^c}N_{A^c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots \\ N_{21} & N_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_0N_{11} & A_0N_{12} & A_0N_{13} & \cdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 (\pi_{n+1}^T, \pi_{n+2}^T, \cdots) &= (\pi_0^T, \cdots, \pi_n^T) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_0N_{11} & A_0N_{12} & A_0N_{13} & \cdots \end{bmatrix} \\
 (\pi_{n+1}^T, \pi_{n+2}^T, \cdots) &= (\pi_n^T A_0N_{11}, \pi_n^T A_0N_{12}, \cdots)
 \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα, έχουμε  $\pi_{n+1}^T = \pi_n^T A_0N_{11} = \pi_n^T A_0N$ , όπου ορίζουμε  $N = N_{11}$ .

Παρατηρούμε ότι η δομή του πίνακα  $P_{A^cA^c}$  είναι ανεξάρτητη της τιμής του  $n$ , που καθορίζει τον διαμερισμό του χώρου καταστάσεων  $S = A \cup A^c$ , και αυτό οφείλεται στην ομοιογένεια της αλυσίδας. Συνοπώς, ο πίνακας  $N = N_{11}$  θα είναι ανεξάρτητος του  $n$ , και θα εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στις διάφορες καταστάσεις του επιπέδου  $\ell(n + 1)$ , ξεκινώντας από το επίπεδο  $\ell(n + 1)$ , πριν η αλυσίδα μεταβεί σε καταστάσεις του συνόλου  $A = \ell(0) \cup \dots \cup \ell(n)$ , για όλες τις τιμές του  $n \geq 0$ . Επιπλέον παρατηρούμε ότι η δομή του πίνακα  $P_{AA^c}$  παραμένει η ίδια ανεξάρτητα της τιμής του  $n$ . Και άρα η σχέση  $\pi_{n+1}^T = \pi_n^T A_0N$  ισχύει για όλα τα επίπεδα  $n \geq 0$ . Ορίζοντας  $R = A_0N$  έπεται επαγωγικά ότι  $\pi_n^T = \pi_{n-1}^T R = \pi_0^T R^n$ ,  $\forall n \geq 0$ . Ο πίνακας  $A_0N = R$  περιέχει το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στο επίπεδο  $\ell(n + 1)$ , ξεκινώντας από το επίπεδο  $\ell(n)$  και αποφεύγοντας το σύνολο  $\bigcup_{0 \leq k \leq n} \ell(k)$ .  $\square$

**Λήμμα 3.1.** Αν η αλυσίδα τύπου QBD είναι θετικά επαναληπτική και ο αριθμός των φάσεων  $m$  είναι πεπερασμένος τότε η ακτίνα σύγκλισης (spectral radius)  $sp(R)$  θα είναι γνησίως μικρότερη της 1.

Προκειμένου τον πλήρη προσδιορισμό της στάσιμης κατανομής υπολείπεται η εύρεση του διανύσματος  $\pi_0$ . Από την σχέση  $\pi^T P = \pi^T$  έπεται άμεσα ότι το διάνυσμα  $\pi_0$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\pi_0^T B + \pi_1^T A_2 = \pi_0^T .$$

Όμως από το θεώρημα 3.1 έπεται ότι  $\pi_1^T = \pi_0^T R$  και άρα η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\pi_0^T B + \pi_0^T R A_2 = \pi_0^T .$$

Η παραπάνω εξίσωση σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\begin{aligned} \pi^T \mathbf{1} = 1 &\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \pi_n^T \mathbf{1} = 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \pi_0^T R^n \mathbf{1} = 1 \Rightarrow \pi_0^T \sum_{n \geq 0} R^n \mathbf{1} = 1 \\ &\Rightarrow \pi_0^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

μας προσδιορίζει το διάνυσμα  $\pi_0$ . Έτσι καταλήγουμε στο επόμενο.

**Θεώρημα 3.2.** Το διάνυσμα  $\pi_0$  βρίσκεται ως η μοναδική λύση του συστήματος

$$\pi_0^T B + \pi_0^T R A_2 = \pi_0^T \tag{3.2}$$

$$\pi_0^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1 . \tag{3.3}$$

Η πίνακο-γεωμετρική ιδιότητα

$$\pi_n^T = \pi_0^T R^n , \quad n \geq 0 \tag{σχέση (3.1)}$$

οδηγεί σε ιδιαίτερες απλουστευμένες εκφράσεις για πλήθος οριακών κατανομών. Για παράδειγμα, το διάνυσμα  $\varphi = \sum_{n \geq 0} \pi_n^T = \pi_0^T (I - R)^{-1}$  είναι η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας ως προς τις διάφορες φάσεις. Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας  $\{p_n, n \geq 0\}$  των διαφόρων επιπέδων δίνεται από τη σχέση

$$p_n = \pi_n^T \mathbf{1} = \pi_0^T R^n \mathbf{1} , \quad \text{για } n \geq 0,$$

και ακολουθεί PH κατανομή όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια.

**Λήμμα 3.2.** Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας  $\{p_n, n \geq 0\}$  ως προς τα διάφορα επίπεδα ακολουθεί PH κατανομή με αναπαράσταση  $(\xi, V)$  με  $m$  φάσεις,  $\xi = \pi_0^T R (I - R)^{-1}$  και  $V = \Delta^{-1} R^T \Delta$ , όπου  $\Delta$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία  $\Delta_{ii} = \xi_i$  και  $R^T$  είναι ο ανάστροφος πίνακας του  $R$ .

### Απόδειξη

Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου επί των καταστάσεων  $\{0, 1, \dots, m\}$  με αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων  $(1 - \xi\mathbf{1}, \xi)$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} - V\mathbf{1} & V \end{bmatrix}.$$

Θα πρέπει  $0 \leq \xi_i \leq 1$  και  $0 \leq (\mathbf{1} - \xi\mathbf{1})_i \leq 1$  για  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Επίσης θα πρέπει  $0 \leq V_{ij} \leq 1$  και  $0 \leq (\mathbf{1} - V\mathbf{1})_i \leq 1$  για  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Τότε ο χρόνος απορρόφησης, έστω  $X$ , στην κατάσταση 0 ακολουθεί PH κατανομή με αναπαράσταση  $(\xi, V)$ . Θα ισχύουν, τότε, τα εξής

$$p_0 = P[X = 0] = 1 - \xi\mathbf{1}$$

και

$$p_n = P[X = n] = \xi V^{n-1}(\mathbf{1} - V\mathbf{1}).$$

Το διάνυσμα  $\xi$  ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως  $\xi = \pi_0^T R \sum_{n \geq 0} R^n$  και συνεπώς τα στοιχεία του θα είναι αυστηρώς θετικά. Επιπλέον

$$\begin{aligned} \xi\mathbf{1} &= \pi_0^T R(I - R)^{-1}\mathbf{1} \\ &= \pi_0^T (I - I + R)(I - R)^{-1}\mathbf{1} \\ &= (\pi_0^T (I - R)^{-1} - \pi_0^T)\mathbf{1} \\ &= (\pi_0^T \sum_{n \geq 0} R^n - \pi_0^T)\mathbf{1} \\ &= (\sum_{n \geq 0} \pi_0^T R^n - \pi_0^T)\mathbf{1} \\ &= (\sum_{n \geq 0} \pi_n^T - \pi_0^T)\mathbf{1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \pi_n^T \mathbf{1} - \pi_0^T \mathbf{1} \\ &= 1 - \pi_0^T \mathbf{1} < 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς το διάνυσμα  $\xi$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του αρχικού διανύσματος σε μια PH αναπαράσταση.



Επιπλέον ο πίνακας  $V$ , από τον ορισμό του, είναι ένας μη αρνητικός πίνακας και

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} - V\mathbf{1} &= \mathbf{1} - \Delta^{-1}R^T\Delta\mathbf{1} \\
&= (I - \Delta^{-1}R^T\Delta)\mathbf{1} \\
&= (\Delta^{-1}\Delta - \Delta^{-1}R^T\Delta)\mathbf{1} \\
&= \Delta^{-1}(I - R^T)\Delta\mathbf{1} \\
&= \Delta^{-1}(I - R^T)\xi^T \\
&= \Delta^{-1}(I - R^T)(\pi_0^T R(I - R)^{-1})^T \\
&= \Delta^{-1}(I - R)^T(\pi_0^T R(I - R)^{-1})^T \\
&= \Delta^{-1}R^T\pi_0 > \mathbf{0} .
\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι  $p_n = \xi V^{n-1}(\mathbf{1} - V\mathbf{1})$  και η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί. Από τον ορισμό του πίνακα  $V = \Delta^{-1}R^T\Delta$  έπεται άμεσα ότι  $R^T = \Delta V\Delta^{-1}$ . Επιπλέον

$$\begin{aligned}
p_n &= \pi_0^T R^n \mathbf{1} \\
&= \mathbf{e}(R^T)^n \pi_0 \\
&= \mathbf{e}(\Delta V\Delta^{-1})^n \pi_0 \\
&= \mathbf{e}\Delta V^n \Delta^{-1} \pi_0 \\
&= \xi V^{n-1}(V\Delta^{-1})\pi_0 \\
&= \xi V^{n-1}(\Delta^{-1}R^T)\pi_0 \\
&= \xi V^{n-1}(\mathbf{1} - V\mathbf{1}) ,
\end{aligned}$$

όπου με  $\mathbf{e}$  συμβολίσαμε το διάνυσμα  $(1, 1, \dots, 1)$ . □

Στην απόδειξη του θεωρήματος 3.1 δείξαμε ότι  $(\pi_{n+1}^T, \pi_{n+2}^T, \dots) = (\pi_n^T A_0 N_{11}, \pi_n^T A_0 N_{12}, \dots)$  ή ισοδύναμα ότι  $\pi_{n+k}^T = \pi_n^T A_0 N_{1k}$ . Όμως από την σχέση ( 3.1 ) του θεωρήματος 3.1 έπεται ότι

$$\pi_{n+k}^T = \pi_0^T R^{n+k} = \pi_0^T R^n R^k = \pi_n^T R^k$$

όπου  $R = A_0 N = A_0 N_{11}$ . Οι δύο αυτές σχέσεις υποδηλώνουν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των πινάκων  $N_{1k}, k > 1$ , και του  $N_{11}$ . Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θα δοθεί στο θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 3.3.** *Οι πίνακες  $N_{1k}, k \geq 1$  ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση*

$$N_{1k+1} = N_{11}A_0N_{1k} , \quad \text{για } k \geq 1.$$

Συνεπώς

$$N_{1k} = N_{11}(A_0N_{11})^{k-1} = N_{11}R^{k-1}, \quad \text{για } k \geq 1.$$

### Απόδειξη

Έστω σταθερό αλλά αυθαίρετο  $n \geq 0$  και έστω ότι η αλυσίδα ξεκινάει σε κάποια από τις καταστάσεις του επιπέδου  $\ell(n+1)$ . Ορίζουμε  $T^c = \ell(n+1) \cup \ell(n+2) \cup \dots$  και  $A^c = \ell(n+2) \cup \ell(n+3) \cup \dots$ . Σύμφωνα με τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου θα ισχύει ότι

$$(N_{1k+1})_{ij} = \sum_{v \geq 0} P[X_v = (n+1+k, j), X_x \in T^c \forall x \in \{0, 1, \dots, v\} \mid X_0 = (n+1, i)].$$

Δεσμεύοντας στην τελευταία φορά που επισκέφτηκε το επίπεδο  $\ell(n+1)$  έπεται ότι

$$\begin{aligned} (N_{1k+1})_{ij} &= \sum_{v \geq 0} \sum_{l=0}^v \sum_{s=1}^m P[X_l = (n+1, s), X_x \in T^c \forall x \in \{0, 1, \dots, l\} \mid X_0 = (n+1, i)] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_v = (n+1+k, j), X_x \in A^c \forall x \in \{l+1, \dots, v\} \mid X_l = (n+1, s)] \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{l \geq 0} P[X_l = (n+1, s), X_x \in T^c \forall x \in \{0, 1, \dots, l\} \mid X_0 = (n+1, i)] \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{v \geq l} P[X_v = (n+1+k, j), X_x \in A^c \forall x \in \{l+1, \dots, v\} \mid X_l = (n+1, s)] \\ &= \sum_{s=1}^m (N_{11})_{is} \sum_{v \geq l} P[X_v = (n+1+k, j), X_x \in A^c \forall x \in \{l+1, \dots, v\} \mid X_l = (n+1, s)]. \end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{v \geq l} P[X_v = (n+1+k, j), X_x \in A^c \forall x \in \{l+1, \dots, v\} \mid X_l = (n+1, s)] &= \\ &= \sum_{v \geq l} \sum_{b=1}^m P[X_{l+1} = (n+2, b) \mid X_l = (n+1, s)] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_v = (n+1+k, j), X_x \in A^c \forall x \in \{l+1, \dots, v\} \mid X_{l+1} = (n+2, b)] \\ &= \sum_{b=1}^m (A_0)_{sb} (N_{1k})_{bj} = (A_0 N_{1k})_{sj}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$(N_{1k+1})_{ij} = \sum_{s=1}^m (N_{11})_{is} (A_0 N_{1k})_{sj}. \quad \square$$

**Παρατήρηση 3.1.** Στο θεώρημα 3.1 δώσαμε μια ερμηνεία του πίνακα  $R$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε  $n \geq 0, k \geq 1, 1 \leq i, j \leq m$  το στοιχείο  $(R^k)_{ij}$ , του πίνακα  $R^k$ , εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση  $(n+k, j)$  ξεκινώντας από την  $(n, i)$ , μέχρι την επιστροφή στο επίπεδο  $\ell(n)$ .

**Θεώρημα 3.4.** Έστω μια θετικά επαναληπτική Μαρκοβιανή διαδικασία τύπου QBD με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ B_{10} & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου οι πίνακες  $A_0, A_1, A_2$  θα είναι τετραγωνικοί ( $m \times m$ ) και ο πίνακας  $B_{00}$  θα είναι τετραγωνικός ( $v \times v$ ).

Τότε προκύπτει ότι

$$\pi_n^T = \pi_1^T R^{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (3.4)$$

Τα διανύσματα  $\pi_0$  και  $\pi_1$  θα βρεθούν ως η μοναδική λύση των εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} \pi_0^T & \pi_1^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 + RA_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0^T & \pi_1^T \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\pi_0^T \mathbf{1} + \pi_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (3.6)$$

### Απόδειξη

Διαμερίζουμε τον χώρο καταστάσεων στα σύνολα  $\ell(0)$ , που αντιστοιχεί στο επίπεδο 0, και στο σύνολο  $A = \bigcup_{n \geq 1} \ell(n)$ , που αντιστοιχεί στα υπόλοιπα επίπεδα. Θεωρούμε την  $A$ -λογοκριμένη Μαρκοβιανή διαδικασία για την οποία από το θεώρημα 2.4 έπεται ότι

$$P(A) = P_{AA} + P_{AA^c} (I - P_{A^c A^c})^{-1} P_{A^c A},$$

και η στάσιμη κατανομή της είναι κανονικοποιημένη στο  $A$ , δηλαδή

$$\pi_A^T = \pi_A^T P(A).$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_{AA} = \begin{bmatrix} A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad P_{AA^c} = \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{A^cA} = \begin{bmatrix} B_{01} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ και } P_{A^cA^c} = B_{00}$$

και άρα θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P_{AA^c}(I - P_{A^cA^c})^{-1}P_{A^cA} &= \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (I - B_{00})^{-1} \begin{bmatrix} B_{01} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_{10}(I - B_{00})^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{01} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_{10}(I - B_{00})^{-1}B_{01} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τελικά

$$P(A) = P_{AA} + P_{AA^c}(I - P_{A^cA^c})^{-1}P_{A^cA} = \begin{bmatrix} A_1 + B_{10}(I - B_{00})^{-1}B_{01} & A_0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της  $A$ -λογοκρινόμενης Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι τύπου QBD της μορφής

$$P = \begin{bmatrix} B & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \text{ όπου } B = A_1 + B_{10}(I - B_{00})^{-1}B_{01}.$$

Άρα από το θεώρημα 3.1 έπεται ότι  $\pi_n^T = \pi_1^T R^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

Προκειμένου τον πλήρη προσδιορισμό της στάσιμης κατανομής υπολείπεται η εύρεση των διανύσματος  $\pi_0$  και  $\pi_1$ . Από την σχέση  $\pi^T P = \pi^T$  έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \pi_0^T B_{00} + \pi_1^T B_{10} &= \pi_0^T \\ \pi_0^T B_{01} + \pi_1^T A_1 + \pi_2^T A_2 &= \pi_1^T \end{aligned}$$

Όμως έχουμε δείξει ότι  $\pi_2^T = \pi_1^T R$  και άρα οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$\begin{aligned} \pi_0^T B_{00} + \pi_1^T B_{10} &= \pi_0^T \\ \pi_0^T B_{01} + \pi_1^T (A_1 + R A_2) &= \pi_1^T \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\pi^T \mathbf{1} = 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \pi_n^T \mathbf{1} = 1 \Rightarrow \pi_0^T \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} \pi_n^T \mathbf{1} = 1 \Rightarrow \pi_0^T \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} \pi_1^T R^{n-1} \mathbf{1} = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0^T \mathbf{1} + \pi_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1$$

προσδιορίζουν πλήρως τα διανύσματα  $\pi_0$  και  $\pi_1$ . □

### 3.2 Οι βασικοί πίνακες $G$ , $U$ και $R$

Παρότι έχουμε καταλήξει στο σημαντικό θεωρητικό αποτέλεσμα ότι η στάσιμη κατανομή είναι πινακογεωμετρικής μορφής, από υπολογιστικής σκοπιάς δεν είναι ακόμη εφικτή η εύρεση της στάσιμης κατανομής  $\pi$ . Μέχρι αυτού του σημείου η εύρεση της στάσιμης κατανομής ανάγεται στον υπολογισμό ενός πίνακα  $N = N_{11}$ , που είναι υποπίνακας του  $N_{A^c}$ , όπου  $A^c = \ell(n+1) \cup \ell(n+1) \cup \dots$ , ο οποίος προκύπτει ως η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος  $X(I - P_{A^c A^c}) = I$  και  $(I - P_{A^c A^c})X = I$ . Δεδομένου ότι ο  $P_{A^c A^c}$  είναι άπειρης διάστασης, ο  $N_{A^c}$  δεν είναι εύκολα υπολογίσιμος, γιαυτό αναζητούμε άλλες υπολογιστικές προσεγγίσεις του πίνακα  $R = A_0 N$ , κάτι που θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Η αναγκαιότητα αυτή μας οδηγεί στην εισαγωγή δύο νέων πινάκων, τους οποίους καλούμε  $U$  και  $G$ .

Στη συζήτηση που θα ακολουθήσει θα εμβαθύνουμε στο γεγονός ότι ο πίνακας  $R$  και οι δύο νέοι πίνακες  $U$  και  $G$ , δεν αποτελούν μόνο μαθηματικά εργαλεία, αλλά σχετίζονται με θεμελιώδη τρόπο με τη δυναμική των QBDs και μάλιστα έχουν πολύ χρήσιμες πιθανοθεωρητικές ερμηνείες.

Έστω ότι η διαδικασία ξεκινάει από το επίπεδο  $\ell(n)$ . Ορίζουμε  $\tau_{\ell(i)}$  να είναι ο χρόνος πρώτης εισόδου ή επανόδου στο επίπεδο  $\ell(i)$ . Ο πίνακας  $U$  ορίζεται κατά στοιχείο μέσω της σχέσης

$$U_{ij} = P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j) \mid X_0 = (n, i)] .$$

Ο πίνακας  $U$  περιέχει τις πιθανότητες ξεκινώντας από μια κατάσταση  $i$  του επιπέδου  $\ell(n)$ , να επιστρέψουμε σε αυτό στην κατάσταση  $j$ , πριν επισκεφτούμε το επίπεδο  $\ell(n-1)$ , για όλες τις δυνατές καταστάσεις  $i, j$ .

Ο πίνακας  $G$  ορίζεται κατά στοιχείο μέσω της σχέσης

$$G_{ij} = P [\tau_{\ell(n-1)} < \infty, X_{\tau_{\ell(n-1)}} = (n-1, j) \mid X_0 = (n, i)]$$

και περιέχει τις πιθανότητες ξεκινώντας από μια κατάσταση  $i$  του επιπέδου  $\ell(n)$ , να επισκεφτούμε το  $\ell(n-1)$  στην κατάσταση  $j$ , σε πεπερασμένο χρόνο, για όλες τις δυνατές καταστάσεις  $i, j$ .

Λόγω της ομοιογένειας του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ , οι τιμές των στοιχείων των πινάκων  $U$  και  $G$  δεν εξαρτώνται από το  $n \geq 1$ .

Οι τρεις πίνακες  $G$ ,  $U$  και  $R$  συνδέονται μέσα από διάφορες σχέσεις, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια. Για παράδειγμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} N_{ij} = (N_{11})_{ij} &= \sum_{\nu \geq 0} P[X_\nu = (n+1, j), X_k \in A^c \forall k \in \{0, 1, \dots, \nu\} \mid X_0 = (n+1, i)] \\ &= \sum_{\nu \geq 0} P[X_\nu = (n+1, j), \tau_{\ell(n)} > \nu \mid X_0 = (n+1, i)] . \end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας  $N = N_{11}$  είναι ανεξάρτητος του  $n$  μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned} N_{ij} = (N_{11})_{ij} &= \sum_{\nu \geq 0} P[X_\nu = (n, j), \tau_{\ell(n-1)} > \nu \mid X_0 = (n, i)] \\ &= \sum_{\nu \geq 0} P\left[\tau_{\ell(n-1)} > \tau_{\ell(n)}^{(\nu)}, X_{\tau_{\ell(n)}^{(\nu)}} = (n, j) \mid X_0 = (n, i)\right] \\ &= \sum_{\nu \geq 0} (U^\nu)_{ij} . \end{aligned}$$

Συνοπώς

$$N = \sum_{\nu \geq 0} U^\nu = (I - U)^{-1} \Rightarrow R = A_0(I - U)^{-1}.$$

Έχουμε ότι

$$G_{ij} = P\left[\tau_{\ell(n-1)} < \infty, X_{\tau_{\ell(n-1)}} = (n-1, j), \mid X_0 = (n, i)\right] .$$

Δεσμεύοντας ως προς την κατάσταση του συστήματος την ακριβώς προηγούμενη χρονική στιγμή, πριν την είσοδο στο επίπεδο  $\ell(n-1)$ , θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \sum_{l=1}^m P\left[\tau_{\ell(n-1)} < \infty, X_{\tau_{\ell(n-1)}} = (n-1, j), \mid X_{\tau_{\ell(n-1)}-1} = (n, l)\right] \\ &\quad \cdot P\left[\tau_{\ell(n-1)} < \infty, X_{\tau_{\ell(n-1)}-1} = (n, l) \mid X_0 = (n, i)\right] \\ &= \sum_{l=1}^m (A_2)_{lj} P\left[\tau_{\ell(n-1)} < \infty, X_{\tau_{\ell(n-1)}-1} = (n, l) \mid X_0 = (n, i)\right] \\ &= \sum_{l=1}^m (A_2)_{lj} \sum_{\nu \geq 0} P\left[\tau_{\ell(n-1)} > \tau_{\ell(n)}^{(\nu)}, X_{\tau_{\ell(n)}^{(\nu)}} = (n, l) \mid X_0 = (n, i)\right] \\ &= \sum_{\nu \geq 0} \sum_{l=1}^m (U^\nu)_{il} (A_2)_{lj} . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$G = \sum_{v \geq 0} U^v A_2 = (I - U)^{-1} A_2 .$$

Δεσμεύοντας στη πρώτη μετάβαση θα δείξουμε ότι

$$U = A_1 + A_0 G .$$

Παρατηρούμε ότι από το επίπεδο  $\ell(n)$ , και αποφεύγοντας το επίπεδο  $\ell(n-1)$ , μπορούμε να μεταβούμε στο  $\ell(n+1)$  σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων  $A_0$ , και στη συνέχεια να επιστρέψουμε κάποια στιγμή στο επίπεδο  $\ell(n)$  σύμφωνα με τον πίνακα  $G$ , ή να παραμείνουμε στο επίπεδο  $\ell(n)$  σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων  $A_1$ . Πιο αναλυτικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U_{ij} &= P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j), | X_0 = (n, i)] = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{y=n}^{n+1} P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j), | X_1 = (y, l)] \cdot \\ &\quad \cdot P [X_1 = (y, l) | X_0 = (n, i)] \\ &= \sum_{l=1}^m P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j), | X_1 = (n, l)] \cdot \\ &\quad \cdot P [X_1 = (n, l) | X_0 = (n, i)] + \\ &\quad + \sum_{l=1}^m P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j), | X_1 = (n+1, l)] \cdot \\ &\quad \cdot P [X_1 = (n+1, l) | X_0 = (n, i)] \\ &= (A_1)_{ij} + \sum_{l=1}^m P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j), | X_1 = (n+1, l)] (A_0)_{il} \\ &= (A_1)_{ij} + \sum_{l=1}^m (A_0)_{il} G_{lj} . \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι

$$\left. \begin{aligned} G &= (I - U)^{-1} A_2 \\ U &= A_1 + A_0 G \\ R &= A_0 (I - U)^{-1} \end{aligned} \right\} \implies U = A_1 + A_0 (I - U)^{-1} A_2 \implies U = A_1 + R A_2 .$$

Συνεπώς αν είναι γνωστός κάποιος από τους πίνακες  $U$ ,  $G$  ή  $R$  τότε μέσω των παραπάνω σχέσεων είναι εύκολος ο υπολογισμός των υπολοίπων. Τα παραπάνω συνοψίζονται στο θεώρημα που ακολουθεί.



**Θεώρημα 3.5.** Αν κάποιος από τους πίνακες  $U$ ,  $G$  ή  $R$  είναι γνωστός, τότε εφαρμόζοντας κάποια από τις σχέσεις που ακολουθούν, μπορούν να προσδιοριστούν και οι άλλοι δύο.

$$N = (I - U)^{-1} \quad (3.7)$$

$$R = A_0(I - U)^{-1} \quad (3.8)$$

$$G = (I - U)^{-1}A_2 \quad (3.9)$$

$$U = A_1 + A_0G \quad (3.10)$$

$$U = A_1 + A_0(I - U)^{-1}A_2 \quad (3.11)$$

$$U = A_1 + RA_2 . \quad (3.12)$$

**Παρατήρηση 3.2.** Παρατηρούμε ότι η σχέση ( 3.11 ) περιέχει μόνο τον πίνακα  $U$  και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για τον υπολογισμό του πίνακα  $U$ , και μέσω αυτού βρίσκεται ο πίνακας  $R$  από την σχέση ( 3.8 ). Ανάλογες σχέσεις μπορούν να βρεθούν για τους πίνακες  $R$  και  $G$ .

**Θεώρημα 3.6.** Οι πίνακες  $U$ ,  $R$  και  $G$  ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις.

$$U = A_1 + A_0(I - U)^{-1}A_2$$

$$G = A_2 + A_1G + A_0G^2 \quad (3.13)$$

$$R = A_0 + RA_1 + R^2A_2 . \quad (3.14)$$

#### Απόδειξη

Η πρώτη σχέση έχει πλήρως αποδειχθεί. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση ( 3.8 ) κατάλληλα με τον πίνακα  $(I - U)$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση ( 3.12 ) προκύπτει ότι

$$R = A_0(I - U)^{-1} \Rightarrow R(I - U) = A_0 \Rightarrow R = A_0 + RU = A_0 + RA_1 + R^2A_2 .$$

Ανάλογα αποδεικνύεται η σχέση ( 3.13 ) :

$$G = (I - U)^{-1}A_2 \Rightarrow G(I - U) = A_2 \Rightarrow G = A_2 + GU = A_2 + A_1G + A_0G^2 . \quad \square$$

**Παρατήρηση 3.3.** Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι μόνο υπολογιστικά χρήσιμες αλλά εκφράζουν ενδιαφέρουσες πιθανοθεωρητικές ιδιότητες. Στην περίπτωση της εξίσωσης  $G = A_2 + A_1G + A_0G^2$  η πιθανοθεωρητική ερμηνεία είναι προφανής. Η πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα σε ένα χαμηλότερο επίπεδο σε πεπερασμένο χρόνο αναλύεται στις πιθανότητες να γίνει άμεσα η μετάβαση στο αμέσως χαμηλότερο επίπεδο σύμφωνα με τον πίνακα  $A_2$  ή να παραμείνει στο ίδιο επίπεδο σύμφωνα με τον πίνακα  $A_1$  και στη συνέχεια να μεταβεί στο χαμηλότερο επίπεδο σε πεπερασμένο χρόνο ή τέλος μπορεί να ανέβει κατά ένα επίπεδο σύμφωνα με τον πίνακα  $A_0$  και μετά σε πεπερασμένο χρόνο να κατέβει δύο επίπεδα.

Η ερμηνεία της εξίσωσης  $R = A_0 + RA_1 + R^2A_2$  είναι επίσης απλή. Ο πίνακας  $R$  περιέχει το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στο επίπεδο  $\ell(n)$ , ξεκινώντας από το επίπεδο  $\ell(n-1)$  και πριν επιστρέψει σε αυτό. Η δεξιά πλευρά της ισότητας αναλύεται σε τρεις προσθετούς ανάλογα το επίπεδο από το οποίο γίνεται η μετάβαση στον  $\ell(n)$ . Αρχικά θα επισκεφτεί το επίπεδο  $\ell(n)$  ξεκινώντας από το  $\ell(n-1)$  σύμφωνα με τον πίνακα  $A_0$ . Στη συνέχεια κάθε επίσκεψη στο επίπεδο  $\ell(n)$  - το αναμενόμενο πλήθος των οποίων περιγράφει ο πίνακας  $R$  - μπορεί να ακολουθηθεί και από άλλη μια επίσκεψη στο επίπεδο  $\ell(n)$  με πιθανότητα  $A_1$ . Τέλος κάθε επίσκεψη στο επίπεδο  $\ell(n+1)$  - το αναμενόμενο πλήθος των οποίων καταγράφει ο πίνακας  $R^2$  - μπορεί να ακολουθηθεί και από άλλη μια επίσκεψη στο επίπεδο  $\ell(n)$  με πιθανότητα  $A_2$ .

Τέλος η ερμηνεία της σχέσης  $U = A_1 + A_0(I - U)^{-1}A_2$  γίνεται άμεσα αν την γράψουμε στη μορφή  $U = A_1 + A_0 \sum_{v \geq 0} U^v A_2$ . Ο πίνακας  $U$  καταγράφει την πιθανότητα να επιστρέψουμε στο επίπεδο  $\ell(n)$ , πριν μεταβούμε στο  $\ell(n-1)$ . Ο όρος  $A_1$  περιγράφει την πιθανότητα να επιστρέψουμε στο επίπεδο  $\ell(n)$  σε ένα βήμα, ενώ ο όρος  $A_0U^vA_2$  περιγράφει την πιθανότητα να ανέβει στο επίπεδο  $\ell(n+1)$ , να κινηθεί στο σύνολο  $\ell(n+1) \cup \ell(n+2) \cup \dots$ , και να επιστρέψει στο  $\ell(n+1)$  σε πεπερασμένο χρόνο και μετά να μεταβεί στο  $\ell(n)$  σύμφωνα με τον πίνακα  $A_2$ . Ο όρος  $A_0U^vA_2$  καταγράφει την πιθανότητα να επιστρέψει στο επίπεδο  $\ell(n)$  μετά από ακριβώς  $v+1$  επισκέψεις στο επίπεδο  $\ell(n+1)$ .

### 3.3 QBD αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  συνεχούς χρόνου, τύπου QBD, με χώρο καταστάσεων  $S = \cup_{n \geq 0} \ell(n)$  και πίνακα ρυθμών μετάβασης της μορφής

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ B_{10} & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου οι πίνακες  $A_0, A_2$  και  $B_{01}, B_{10}$  είναι μη αρνητικοί πίνακες, ενώ οι  $A_1$  και  $B_{00}$  έχουν αρνητικά τα διαγώνια στοιχεία τους και μη αρνητικά τα υπόλοιπα. Το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του πίνακα  $Q$  είναι ίσο με μηδέν :

$$\begin{aligned} (B_{00} + B_{01})\mathbf{1} &= \mathbf{0}, \\ (B_{10} + A_1 + A_0)\mathbf{1} &= \mathbf{0}, \\ (A_2 + A_1 + A_0)\mathbf{1} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η διαδικασία είναι αδιαχώριστη και κανονική.

**Ορισμός 3.1.** Ορίζουμε δύο ρολόγια. Το πρώτο καταγράφει τον χρόνο για την συνεχή διαδικασία  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  και καλείται καθολικός χρόνος. Το δεύτερο ρολόι μετράει τον χρόνο που περνάει η διαδικασία σε ένα σύνολο  $A \subsetneq S$  και αυξάνει σύμφωνα με τον καθολικό χρόνο για όσο διάστημα το σύστημα βρίσκεται μέσα στο σύνολο  $A$ , ξεκινώντας από το μηδέν τη στιγμή της πρώτης εισόδου στο σύνολο  $A$ , και σταματάει μόλις το σύστημα μεταβεί σε κάποια κατάσταση εκτός αυτού. Ο χρόνος αυτός καλείται τοπικός χρόνος.

**Θεώρημα 3.7.** Έστω ότι η συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή διαδικασία τύπου QBD είναι θετικά επαναληπτική. Τότε η στάσιμη κατανομή δίνεται από την σχέση

$$\pi_n^T = \pi_1^T R^{n-1}, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.15)$$

όπου ο πίνακας  $R$  καταγράφει τον ρυθμό παραμονής στις καταστάσεις του επιπέδου  $\ell(n+1)$  ανά μονάδα τοπικού χρόνου του επιπέδου  $\ell(n)$ , και βρίσκεται ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$A_0 + X A_1 + X^2 A_2 = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι  $R = A_0 N$ , όπου ο πίνακας  $N$  καταγράφει τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής στις καταστάσεις του επιπέδου  $\ell(n)$ , ξεκινώντας από το  $\ell(n)$ , πριν επισκεφτεί για πρώτη φορά το επίπεδο  $\ell(n-1)$ . Τα διανύσματα  $\pi_0$  και  $\pi_1$  θα βρεθούν ως η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} \pi_0^T & \pi_1^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 + RA_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\pi_0^T \mathbf{1} + \pi_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1. \quad (3.18)$$

### Απόδειξη

Θεωρούμε την ομοιομορφοποιημένη αλυσίδα διακριτού χρόνου, έστω  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ , επιλέγοντας  $\Lambda = \sup\{q_i, i \in S\} < \infty$ . Τότε ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$P = I + \frac{1}{\Lambda} Q = \begin{bmatrix} I + \frac{1}{\Lambda} B_{00} & \frac{1}{\Lambda} B_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{\Lambda} B_{10} & I + \frac{1}{\Lambda} A_1 & \frac{1}{\Lambda} A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\Lambda} A_2 & I + \frac{1}{\Lambda} A_1 & \frac{1}{\Lambda} A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} A_2 & I + \frac{1}{\Lambda} A_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} A_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{00} & \widetilde{B}_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ \widetilde{B}_{10} & \widetilde{A}_1 & \widetilde{A}_0 & 0 & \cdots \\ 0 & \widetilde{A}_2 & \widetilde{A}_1 & \widetilde{A}_0 & \cdots \\ 0 & 0 & \widetilde{A}_2 & \widetilde{A}_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Θα συμβολίζουμε με  $\tilde{\pi}_n$  τη στάσιμη κατανομή της ομοιομορφοποιημένης, παρ'όλο που  $\tilde{\pi}_n = \pi_n$ . Τότε από το θεώρημα 3.4 έπεται ότι

$$\tilde{\pi}_n^T = \tilde{\pi}_1^T R^{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

όπου ο πίνακας  $R$ , από την σχέση (3.14), βρίσκεται ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$R = \widetilde{A}_0 + R\widetilde{A}_1 + R^2\widetilde{A}_2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\Lambda} A_0 + R(I + \frac{1}{\Lambda} A_1) + \frac{1}{\Lambda} R^2 A_2 \Leftrightarrow A_0 + RA_1 + R^2 A_2 = \mathbf{0}.$$

Τα διανύσματα  $\tilde{\pi}_0$  και  $\tilde{\pi}_1$  θα βρεθούν ως η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0^T & \tilde{\pi}_1^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{00} & \widetilde{B}_{01} \\ \widetilde{B}_{10} & \widetilde{A}_1 + R\widetilde{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0^T & \tilde{\pi}_1^T \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\pi}_0^T \mathbf{1} + \tilde{\pi}_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1,$$

ισοδύναμα, λόγω της συγκεκριμένης μορφής των στοιχείων του πίνακα  $P$  έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0^T & \tilde{\pi}_1^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I + \frac{1}{\Lambda} B_{00} & \frac{1}{\Lambda} B_{01} \\ \frac{1}{\Lambda} B_{10} & I + \frac{1}{\Lambda} A_1 + \frac{1}{\Lambda} R A_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0^T & \tilde{\pi}_1^T \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\pi}_0^T \mathbf{1} + \tilde{\pi}_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0^T & \tilde{\pi}_1^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 + R A_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\tilde{\pi}_0^T \mathbf{1} + \tilde{\pi}_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1.$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίστηκε στην ύπαρξη ενός  $\Lambda < \infty$ . Στη περίπτωση που τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $Q$  δεν φράσσονται από κάποιον αριθμό  $\Lambda$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Λογοκριμένη Μαρκοβιανή διαδικασία για την ευθεία απόδειξη του θεωρήματος. Ενώ, τέλος, κάποιος θα μπορούσε να μελετήσει την συνεχή περίπτωση απευθείας.  $\square$

**Παρατήρηση 3.4.** Όπως και στον διακριτό χρόνο, έτσι και εδώ, μπορούμε να ορίσουμε δύο πίνακες  $U$  και  $G$  με

$$U_{ij} = P [\tau_{\ell(n)} < \tau_{\ell(n-1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j) \mid X_0 = (n, i)]$$

όπου ο πίνακας  $U$  περιέχει τις πιθανότητες ξεκινώντας από το επίπεδο  $\ell(n)$ , να επιστρέψουμε σε αυτό, πριν επισκεφτούμε το επίπεδο  $\ell(n-1)$  και θα ικανοποιεί τη σχέση  $U = A_1 + A_0 G$ , και

$$G_{ij} = P [\tau < \infty, X_\tau = (n-1, j) \mid X_0 = (n, i)]$$

όπου  $\tau$  είναι ο χρόνος πρώτου περάσματος από το επίπεδο  $\ell(n)$  στο επίπεδο  $\ell(n-1)$ , και αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τη σχέση  $A_2 + A_1 G + A_0 G^2 = \mathbf{0}$ .



## Κεφάλαιο 4

# Αλγοριθμικές τεχνικές για τον υπολογισμό του πίνακα $R$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στις συνθήκες ύπαρξης της στάσιμης κατανομής μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας τύπου QBD καθώς και στη μορφή αυτής. Είδαμε ότι κάθε Μαρκοβιανή διαδικασία τύπου QBD με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ B_{10} & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

όπου οι πίνακες  $A_0, A_1, A_2$  είναι τετραγωνικοί ( $m \times m$ ) και ο πίνακας  $B_{00}$  είναι τετραγωνικός ( $\nu \times \nu$ ), έχει στάσιμη κατανομή  $\pi^T = (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \cdots)$ , όπου τα  $\pi_2, \pi_3, \dots$  υπολογίζονται αναδρομικά από τη σχέση

$$\pi_n^T = \pi_1^T R^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα προχωρήσουμε στην αριθμητική προσέγγιση του πίνακα  $R$ .

Αποδείξαμε ότι

$$R = A_0(I - A_1 - A_0G)^{-1}.$$

Συνεπώς ο υπολογισμός του πίνακα  $R$  είναι άμεσος αν γνωρίζουμε τον πίνακα  $G$ . Θα δώσουμε στη

συνέχεια δυο αλγόριθμους που υπολογίζουν τον πίνακα  $G$  με την υπόθεση ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι της μορφής που δίνεται στη σχέση ( 4.1 ) και ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.

#### 4.1 Ένας βασικός αλγόριθμος

Έστω  $\{X_t : t \geq 0\}$  μια Μαρκοβιανή διαδικασία τύπου QBD με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} B & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Ορίζουμε τους χρόνους πρώτης εισόδου στο επίπεδο  $\ell(i)$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$  ως

$$\tau_{\ell(i)} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \ell(i)\} .$$

Λόγω της ομοιογένειας του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ , οι τιμές των στοιχείων των πινάκων  $U$  και  $G$  δεν εξαρτώνται από το  $n \geq 1$ , και άρα οι πίνακες  $U$  και  $G$  θα ορίζονται ως

$$U_{ij} = P[\tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_0 = (1, i)]$$

$$G_{ij} = P[\tau_{\ell(0)} < \infty, X_{\tau_{\ell(0)}} = (0, j) \mid X_0 = (1, i)] , \quad 1 \leq i, j \leq m .$$

Για λόγους απλούστευσης οι πίνακες  $U$  και  $G$  θα αναπαρίστανται ως

$$U = P[\tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, X_{\tau_{\ell(1)}} \mid X_0 \in \ell(1)] \quad (4.2)$$

$$G = P[\tau_{\ell(0)} < \infty, X_{\tau_{\ell(0)}} \mid X_0 \in \ell(1)] . \quad (4.3)$$

Ένας απλός και συχνά αποτελεσματικός αλγόριθμος βασίζεται στις σχέσεις ( 3.9 ) και ( 3.10 )

$$G = (I - U)^{-1}A_2 \quad (3.9)$$

$$U = A_1 + A_0G . \quad (3.10)$$



**Θεώρημα 4.1.** Οι ακολουθίες  $\{U(k), k \geq 1\}$  και  $\{G(k), k \geq 1\}$  που ορίζονται ως

$$U(k) = P[\tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} | X_0 \in \ell(1)] \quad (4.4)$$

$$G(k) = P[\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(0)}} | X_0 \in \ell(1)] , \quad (4.5)$$

για  $k \geq 1$ , ικανοποιούν τις σχέσεις

$$G(0) = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

$$U(k) = A_1 + A_0 G(k-1) \quad (4.7)$$

$$G(k) = (I - U(k))^{-1} A_2 \quad k \geq 1 . \quad (4.8)$$

Οι δυο ακολουθίες είναι γνησιώς αύξουσες και συγκλίνουν στους πίνακες  $U$  και  $G$ , αντίστοιχα.

#### Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$G(k)_{ij} = P[\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(0)}} = (0, j) | X_0 = (1, i)] .$$

Η  $G(k)_{ij}$  εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα να μεταβεί στο επίπεδο  $\ell(0)$  για πρώτη φορά στην κατάσταση  $(0, j)$ , χωρίς να περάσει από το επίπεδο  $\ell(k+1)$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $(1, i)$ , την χρονική στιγμή 0.

Δεσμεύοντας ως προς την κατάσταση του συστήματος την ακριβώς προηγούμενη χρονική στιγμή πριν την είσοδο στο επίπεδο  $\ell(0)$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} G(k)_{ij} &= \sum_{l=1}^m P[\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(0)}} = (0, j) | X_{\tau_{\ell(0)}-1} = (1, l)] \cdot \\ &\quad \cdot P[\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(0)}-1} = (1, l) | X_0 = (1, i)] \\ &= \sum_{l=1}^m (A_2)_{lj} P[\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(0)}-1} = (1, l) | X_0 = (1, i)] \\ &= \sum_{l=1}^m (A_2)_{lj} \sum_{\nu \geq 0} P[\tau_{\ell(0)} > \tau_{\ell(1)}^{(\nu)}, \tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}^{(\nu)}} = (1, l) | X_0 = (1, i)] \\ &= \sum_{\nu \geq 0} \sum_{l=1}^m (U(k)^\nu)_{il} (A_2)_{lj} . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$G(k) = \sum_{\nu \geq 0} U(k)^\nu A_2 = (I - U(k))^{-1} A_2 .$$

Έχουμε ότι

$$U(k)_{ij} = P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_0 = (1, i) \right] .$$

Η  $U(k)_{ij}$  εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα να επιστρέψει στο επίπεδο  $\ell(1)$  και συγκεκριμένα στην κατάσταση  $(1, j)$ , ξεκινώντας από την κατάσταση  $(1, i)$  την χρονική στιγμή 0, χωρίς να περάσει από τα επίπεδα  $\ell(k+1)$  και  $\ell(0)$ .

Δεσμεύοντας στη πρώτη μετάβαση θα δείξουμε ότι

$$U(k) = A_1 + A_0 G(k-1) .$$

Παρατηρούμε ότι από το επίπεδο  $\ell(1)$ , και αποφεύγοντας το επίπεδο  $\ell(0)$ , μπορούμε να μεταβούμε στο  $\ell(2)$  σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων  $A_0$ , και στη συνέχεια να επιστρέψουμε κάποια στιγμή στο επίπεδο  $\ell(1)$  σύμφωνα με τον πίνακα  $G(k-1)$ , ή να παραμείνουμε στο επίπεδο  $\ell(n)$  σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων  $A_1$ . Πιο αναλυτικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U(k)_{ij} &= P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_0 = (1, i) \right] \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{y=1}^2 P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(n)}} = (n, j) \mid X_1 = (y, l) \right] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_1 = (y, l) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= \sum_{l=1}^m P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_1 = (1, l) \right] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_1 = (1, l) \mid X_0 = (1, i)] + \\ &\quad + \sum_{l=1}^m P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_1 = (2, l) \right] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_1 = (2, l) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= (A_1)_{ij} + \sum_{l=1}^m P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_1 = (2, l) \right] (A_0)_{il} \\ &= (A_1)_{ij} + \sum_{l=1}^m P \left[ \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_1 = (2, l) \right] (A_0)_{il} \\ &= (A_1)_{ij} + \sum_{l=1}^m (A_0)_{il} G(k-1)_{lj} , \end{aligned}$$

εφόσον  $G(k)_{ij} = P [\tau_{\ell(n-1)} < \tau_{\ell(n+k)}, X_{\tau_{\ell(n-1)}} = (n-1, j) \mid X_0 = (n, i)]$  .

Οι ακολουθίες  $\{U(k), k \geq 1\}$  και  $\{G(k), k \geq 1\}$  είναι γνησίως αύξουσες εφόσον

$$0 = \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(2)} < \tau_{\ell(3)} < \dots \quad \text{όταν } X_0 \in \ell(1)$$

μιας και η Μαρκοβιανή αλυσίδα κινείται κατά ένα επίπεδο κάθε φορά. Οδηγούμαστε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι  $\tau_{\ell(k)} \geq k - 1$ . Συνεπώς  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{\ell(k)} = \infty$ .

Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} G(k)_{ij} &= \lim_{k \rightarrow \infty} P [\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(0)}} = (0, j) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= P [\tau_{\ell(0)} < \infty, X_{\tau_{\ell(0)}} = (0, j) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} U(k)_{ij} &= \lim_{k \rightarrow \infty} P [\tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(k+1)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= P [\tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, \tau_{\ell(1)} < \infty, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= P [\tau_{\ell(1)} < \tau_{\ell(0)}, X_{\tau_{\ell(1)}} = (1, j) \mid X_0 = (1, i)] \\ &= U . \end{aligned}$$

□

Θα ορίσουμε για τον αλγόριθμο

$$\begin{aligned} G(0) &= \mathbf{0} \\ U(k) &= A_1 + A_0 G(k-1) \\ G(k) &= (I - U(k))^{-1} A_2, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

ένα κριτήριο σταματήματος. Όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική, η ακολουθία  $\{G(k), k \geq 1\}$  συγκλίνει στον πίνακα  $G$  αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad \|G(k) - G\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k \geq n_o(\varepsilon),$$

όπου  $\|A\|_\infty = \sup\{|A_{ij}|, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, n, m \in \mathbb{N}\}$ .

Ισοδύναμα η  $\{G(k), k \geq 1\}$  συγκλίνει στον πίνακα  $G$  αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|G(k)\mathbf{1} - \mathbf{1}\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k \geq n_o(\varepsilon) .$$

Με βάση το παραπάνω κριτήριο ο αλγόριθμος θα σταματήσει στο βήμα  $n_o(\varepsilon)$  για το οποίο για κάθε  $i$  ισχύει

$$(G(n_o(\varepsilon))\mathbf{1})_i = \sum_{j \geq 0} G(n_o(\varepsilon))_{ij} = P [\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(n_o(\varepsilon)+1)} \mid X_0 = (1, i)] > 1 - \varepsilon .$$

**Παρατήρηση 4.1.** Το πλήθος των επαναλήψεων  $n_o(\varepsilon)$  έχει πιθανοθεωρητική ερμηνεία. Η  $P$  [ ο μέγιστος αριθμός πελατών στο σύστημα σε ένα κύκλο συνεχούς λειτουργίας  $\leq n_o(\varepsilon) \mid X_0 = (1, i)$  ] είναι ίση με

$$P [\tau_{\ell(0)} < \tau_{\ell(n_o(\varepsilon)+1)} \mid X_0 = (1, i)] = (G(n_o(\varepsilon))\mathbf{1})_i .$$

Όμως έχουμε ορίσει το  $n_o(\varepsilon)$  μέσω της σχέσης  $(G(n_o(\varepsilon))\mathbf{1})_i > 1 - \varepsilon$ , οπότε το  $n_o(\varepsilon)$ , εκφράζει το  $(1 - \varepsilon)$ -ποσοστημόριο του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα σε ένα κύκλο συνεχούς λειτουργίας.

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια του θεωρήματος 4.1 είναι ότι οι πίνακες  $U$  και  $G$  προκύπτουν ως η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων ( 3.9 ) και ( 3.10 )

$$G = (I - U)^{-1}A_2 \tag{3.9}$$

$$U = A_1 + A_0G \tag{3.10}$$

όπως αποδεικνύεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 4.2.** Οι πίνακες  $U$  και  $G$  προκύπτουν ως η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων

$$X = A_1 + A_0Y \tag{4.9}$$

$$Y = \sum_{n \geq 0} X^n A_2 \tag{4.10}$$

στο σύνολο των μη αρνητικών πινάκων με συγκλίνουσες σειρές.

**Απόδειξη** Έχουμε ήδη δείξει ότι οι πίνακες  $U$  και  $G$  ικανοποιούν τις εξισώσεις  $X = A_1 + A_0Y$  και  $Y = \sum_{n \geq 0} X^n A_2$ , αντίστοιχα. Έστω  $X^*$  και  $Y^*$  τυχούσες λύσεις των σχέσεων ( 4.9 ) και ( 4.10 ), αντίστοιχα. Τότε θα δείξουμε ότι  $X^* \geq U$  και  $Y^* \geq G$ , ισοδύναμα θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι  $X^* \geq U(k)$  και  $Y^* \geq G(k)$  για κάθε  $k \geq 1$ .

$$\begin{aligned} U(1) &= A_1 \leq A_1 + A_0Y^* = X^* \Rightarrow U(1) \leq X^* \\ G(1) &= \sum_{n \geq 0} (U(1))^n A_2 \leq \sum_{n \geq 0} (X^*)^n A_2 = Y^* \Rightarrow G(1) \leq Y^* . \end{aligned}$$

Έστω  $U(k) \leq X^*$  και  $G(k) \leq Y^*$ . Θα δείξουμε ότι  $U(k+1) \leq X^*$  και  $G(k+1) \leq Y^*$ . Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U(k+1) &= A_1 + A_0G(k) \leq A_1 + A_0Y^* = X^* \Rightarrow U(k+1) \leq X^* \\ G(k+1) &= \sum_{n \geq 0} (U(k))^n A_2 \leq \sum_{n \geq 0} (X^*)^n A_2 = Y^* \Rightarrow G(k+1) \leq Y^* . \end{aligned}$$

Η επαγωγή βασίστηκε στην εξής ιδιότητα. Έστω  $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij}), \Gamma = (\gamma_{ij}), \Delta = (\delta_{ij})$  τετραγωνικοί πίνακες τέτοιοι που  $0 \leq \alpha_{ij} \leq \beta_{ij} \Rightarrow A \leq B$  και  $0 \leq \gamma_{ij} \leq \delta_{ij} \Rightarrow \Gamma \leq \Delta$  τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι  $A\Gamma \leq B\Delta$ . □

Οι πίνακες  $R$  και  $U$  προκύπτουν ως η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων ( 3.8 ) και ( 3.12 )

$$R = A_0(I - U)^{-1} \tag{3.8}$$

$$U = A_1 + RA_2 \tag{3.12}$$

όπως αποδεικνύεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 4.3.** Οι πίνακες  $U$  και  $R$  προκύπτουν ως η ελάχιστη λύση των εξισώσεων

$$X = A_1 + ZA_2 \tag{4.11}$$

$$Z = A_0 \sum_{n \geq 0} X^n \tag{4.12}$$

στο σύνολο των μη αρνητικών πινάκων με συγκλίνουσες σειρές.

**Απόδειξη**

Ορίζουμε την ακολουθία  $\{R(k), k \geq 1\}$  ως  $R(k) = A_0 \sum_{n \geq 0} (U(k))^n$ .

Αποδεικνύεται ότι  $\lim_{k \rightarrow \infty} R(k) = A_0 \sum_{n \geq 0} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} (U(k))^n \right) = A_0 \sum_{n \geq 0} U^n = A_0(I - U)^{-1} = R$ . Επιπλέον η ακολουθία  $\{R(k)\}$  είναι αύξουσα μιας και η ακολουθία  $\{U(k)\}$  είναι αύξουσα.

Η απόδειξη ότι οι πίνακες  $U$  και  $R$  είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ( 4.11 ) και ( 4.11 ) είναι όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 4.2 . □

**Θεώρημα 4.4.** *Ο πίνακας  $U$  προκύπτει ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης*

$$X = A_1 + A_0 \sum_{n \geq 0} X^n A_2 \quad (4.13)$$

στο σύνολο των μη αρνητικών πινάκων με συγκλινοσες σειρές.

*Ο πίνακας  $G$  προκύπτει ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης*

$$Y = A_2 + A_1 Y + A_0 Y^2 \quad (4.14)$$

στο σύνολο των μη αρνητικών πινάκων.

*Ο πίνακας  $R$  προκύπτει ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης*

$$Z = A_0 + Z A_1 + Z^2 A_2 \quad (4.15)$$

στο σύνολο των μη αρνητικών πινάκων.

### Απόδειξη

Έστω  $X^*$  μια μη αρνητική λύση της εξίσωσης ( 4.13 ) και έστω  $Y^* = \sum_{n \geq 0} (X^*)^n A_2$ . Εφόσον  $X^*$  είναι μη αρνητικός έπεται ότι  $\sum_{n \geq 0} (X^*)^n \geq 0$  και

$$X^* = A_1 + A_0 \sum_{n \geq 0} (X^*)^n A_2 \geq A_1 = U(1) ,$$

Ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2 αποδεικνύεται ότι  $U(k) \leq X^*$ ,  $G(k) \leq Y^*$  για κάθε  $k \geq 1$ .

Η απόδειξη της εξίσωσης ( 4.14 ) θα δοθεί με απαγωγή σε άτοπο. Έστω  $Y^*$  μια μη αρνητική λύση της εξίσωσης ( 4.14 ) και έστω  $Y^* \leq G$ ,  $Y^* \neq G$ . Ορίζουμε  $X_* = A_1 + A_0 Y^*$ . Εφόσον  $Y^*$  λύση της εξίσωσης ( 4.14 ), έπεται ότι

$$\begin{aligned}
Y^* &= A_2 + (A_1 + A_0 Y^*) Y^* \\
&= A_2 + X^* Y^* \\
&= A_2 + X^* (A_2 + X^* Y^*) \\
&= A_2 + X^* A_2 + (X^*)^2 Y^* \\
&= A_2 + X^* A_2 + (X^*)^2 (A_2 + X^* Y^*) \\
&= A_2 + X^* A_2 + (X^*)^2 A_2 + (X^*)^3 Y^* + \dots \\
&= \sum_{n \geq 0} (X^*)^n A_2 .
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι  $X^* = A_1 + A_0 Y^* \leq A_1 + A_0 G = U$ , συνεπώς η σειρά  $\sum_{n \geq 0} (X^*)^n$  θα συγκλίνει από το κριτήριο σύγκλισης, εφόσον η σειρά  $\sum_{n \geq 0} U^n$  συγκλίνει. Έχουμε δείξει ότι το ζεύγος  $(X^*, Y^*)$  είναι λύση των εξισώσεων ( 4.9 ) και ( 4.10 ), επιπλέον  $X^* \leq U$  και  $Y^* \leq G$ , που έρχεται σε αντίφαση με το Θεώρημα 4.2 .

Έστω  $Z^*$  μια μη αρνητική λύση της εξίσωσης ( 4.15 ). Ορίζουμε  $X^* = A_1 + Z^* A_2$ . θα αποδείξουμε ότι  $Z^* \geq R$  και  $X^* \geq U$ , ισοδύναμα θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι  $Z^* \geq R(k)$  και  $X^* \geq U(k)$  για κάθε  $k \geq 1$ . Εφόσον  $Z^* \geq 0$ , έπεται ότι

$$\begin{aligned}
Z^* &= A_0 + Z^* A_1 + (Z^*)^2 A_2 \\
&\geq A_0 + Z^* A_1 \\
&= A_0 + (A_0 + Z^* A_1) A_1 \\
&= A_0 + A_0 A_1 + Z^* (A_1)^2 \\
&= A_0 + A_0 A_1 + (A_0 + Z^* A_1) (A_1)^2 \\
&= A_0 + A_0 A_1 + A_0 A_1^2 + A_0 A_1^3 + \dots \\
&= A_0 \sum_{n \geq 0} (A_1)^n \\
&= A_0 (I - A_1)^{-1} \\
&= A_0 (I - U_1)^{-1} \\
&= R(1) .
\end{aligned}$$

Έστω  $R(k) \leq Z^*$ . Θα δείξουμε ότι  $R(k+1) \leq Z^*$ . Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 U(k+1) &= A_1 + A_0 G(k) \\
 &= A_1 + A_0 (I - U(k))^{-1} A_2 \\
 &= A_1 + R(k) A_2 \\
 &\leq A_1 + Z^* A_2 \\
 &= X^* .
 \end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 Z^* &= A_0 + Z^* A_1 + (Z^*)^2 A_2 \\
 &= A_0 + Z^* (A_1 + Z^* A_2) \\
 &= A_0 + Z^* X^* \\
 &\geq A_0 + Z^* U(k+1) \\
 &= A_0 + (A_0 + Z^* U(k+1)) U(k+1) \\
 &= A_0 + A_0 U(k+1) + Z^* (U(k+1))^2 \\
 &\geq A_0 + A_0 U(k+1) + A_0 (U(k+1))^2 + \dots \\
 &= A_0 \sum_{n \geq 0} (U(k+1))^n \\
 &= A_0 (I - U(k+1))^{-1} \\
 &= R(k+1) .
 \end{aligned}$$

Τελικά  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} R(k) \leq Z^*$ . □

Οι εξισώσεις ( 4.12 ) - ( 4.15 ) οδηγούν άμεσα στην εύρεση αλγόριθμων. Οι Wallace και Neuts αρχικά χρησιμοποίησαν την εξίσωση ( 4.15 ) μέσω της οποίας οδηγήθηκαν στον αλγόριθμο

$$\begin{aligned}
 R(0) &= 0 \\
 R(k+1) &= A_0 + R(k) A_1 + R^2(k) A_2 .
 \end{aligned}$$



## 4.2 Ακριβείς υπολογισμοί των πινάκων $G$ , $R$ σε ειδικές μορφές

Οι αλγόριθμοι που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο μπορούν να εφαρμοστούν ανεξάρτητα της μορφής του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια κάποιους αλγόριθμους που εφαρμόζονται όταν πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις για τα μπλοκ  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$ .

Στην περίπτωση που ο πίνακας  $A_2$  έχει τάξη 1, οπότε αναπτύσσεται ως  $A_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ , γινόμενο δυο διανυσμάτων, τότε ο πίνακας  $G$  υπολογίζεται άμεσα, όπως προκύπτει από το θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 4.5.** Έστω μια θετικά επαναληπτική διαδικασία τύπου  $QBD$ , όπου ο πίνακας  $A_2$  αναπτύσσεται ως  $A_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$  γινόμενο δυο διανυσμάτων, όπου  $\mathbf{c}$  ένα διάνυσμα στήλη και  $\mathbf{r}$  ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα γραμμή, δηλαδή ισχύει ότι  $\mathbf{r}\mathbf{1} = 1$ . Τότε ο πίνακας  $G$  δίνεται ως  $G = \mathbf{1} \cdot \mathbf{r}$ .

### Απόδειξη

Έχουμε αποδείξει στην εξίσωση ( 3.9 ) ότι  $G = (I - U)^{-1}A_2 = (I - U)^{-1}\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{r}$ , για κάποιο διάνυσμα στήλη  $\mathbf{c}^* = (I - U)^{-1}\mathbf{c}$ . Όμως ο πίνακας  $G$  είναι στοχαστικός, δηλαδή  $G\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , συνεπώς  $\mathbf{1} = G\mathbf{1} = (\mathbf{c}^* \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{1} = \mathbf{c}^*$ . □

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας  $R$  θα δίνεται από την σχέση

$$R = A_0(I - A_1 - A_0 \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{r})^{-1} .$$

Στη συμμετρική περίπτωση που ο πίνακας  $A_0$  έχει τάξη 1, οπότε αναπτύσσεται ως  $A_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ , γινόμενο δυο διανυσμάτων, τότε ο πίνακας  $R$  υπολογίζεται άμεσα, όπως προκύπτει από το θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 4.6.** Έστω μια θετικά επαναληπτική διαδικασία τύπου  $QBD$ , όπου ο πίνακας  $A_0$  αναπτύσσεται ως  $A_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$  γινόμενο δυο διανυσμάτων, όπου  $\mathbf{c}$  ένα διάνυσμα στήλη και  $\mathbf{r}$  ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα γραμμή, δηλαδή ισχύει ότι  $\mathbf{r}\mathbf{1} = 1$ . Τότε ο πίνακας  $R$  δίνεται ως  $R = \mathbf{c} \cdot \xi$ , όπου

$$\xi = \mathbf{r}(I - A_1 - \eta A_2)^{-1}$$

και  $\eta = \xi\mathbf{c}$ , όπου  $\eta = sp(R)$ , όταν  $m < \infty$ .

### Απόδειξη

Έχουμε αποδείξει στην εξίσωση ( 3.8 ) ότι  $R = A_0(I - U)^{-1} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})(I - U)^{-1} = \mathbf{c} \cdot \xi$ , για κάποιο διάνυσμα γραμμή  $\xi = \mathbf{r}(I - U)^{-1}$ .

Ορίζουμε  $\eta = \xi\mathbf{c}$  τότε  $R^2 = (\mathbf{c} \cdot \xi) \cdot (\mathbf{c} \cdot \xi) = \mathbf{c} \cdot \eta \cdot \xi = \eta(\mathbf{c} \cdot \xi)$ . Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι  $R^n = \eta^{n-1}(\mathbf{c} \cdot \xi)$ , για κάθε  $n \geq 1$ . Απαιτούμε η σειρά  $\sum_{n \geq 1} R^n$  να συγκλίνει, ισοδύναμα απαιτούμε η σειρά  $\sum_{n \geq 0} \eta^n$  να συγκλίνει, και άρα θα πρέπει  $\eta < 1$ . ( Λήμμα 3.1 )

Έχουμε αποδείξει ότι ο πίνακας  $R$  ικανοποιεί την εξίσωση ( 4.15 ), έπεται λοιπόν ότι

$$\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} = A_0 + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} A_1 + (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 A_2$$

$$\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} A_1 + \eta \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} A_2$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} (I - A_1 - \eta A_2)$$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} (I - A_1 - \eta A_2)$$

Θα δείξουμε μέσα από λογικούς ισχυρισμούς ότι ο πίνακας  $I - A_1 - \eta A_2$  είναι αντιστρέψιμος και άρα

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} (I - A_1 - \eta A_2)^{-1} .$$

Ορίζουμε μια νέα διαδικασία τύπου QBD με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} B & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ (1 - \eta)A_2 & A_1 + \eta A_2 & A_0 & 0 & \dots \\ 0 & (1 - \eta)A_2 & A_1 + \eta A_2 & A_0 & \dots \\ 0 & 0 & (1 - \eta)A_2 & A_1 + \eta A_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \eta)A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Επειδή η αρχική διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική, έπεται ότι και η νέα διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική και μάλιστα οι αναμενόμενοι χρόνοι παραμονής σε κάθε επίπεδο, πριν η αλυσίδα μεταβεί σε κάποιο άλλο επίπεδο, είναι πεπερασμένοι και άρα ορίζεται ο αντίστροφος του πίνακα  $I - A_1 - \eta A_2$ .  $\square$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω θεώρημα δεν παρέχει μια αναλυτική έκφραση για τον πίνακα  $R$ , μιας και η εξίσωση υπολογισμού του πίνακα  $R = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} (I - A_1 - \eta A_2)^{-1}$  εξαρτάται από το  $\eta$ . Η ποσότητα  $\eta$ , μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την εξίσωση

$$z = \mathbf{r} (I - A_1 - z A_2)^{-1} \mathbf{c}$$

για  $z \in (0, 1)$ . Ο αλγόριθμος αυτός αναπτύχθηκε από τους Ramaswami και Latouche [ 6 ].

Σαν μια ακόμα ειδική περίπτωση θα δώσουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του πίνακα  $G$ , στην περίπτωση που οι πίνακες  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$  είναι τριγωνικοί.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι οι πίνακες  $A_0 = (a_{ij}^{(0)})_{i \leq j}$ ,  $A_1 = (a_{ij}^{(1)})_{i \leq j}$  και  $A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{i \leq j}$  είναι άνω τριγωνικοί. Θα αποδείξουμε τότε ότι και ο πίνακας  $G$  είναι άνω τριγωνικός. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ο πίνακας  $G$  είναι κάτω τριγωνικός, όταν οι πίνακες  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$  είναι κάτω τριγωνικοί.

**Θεώρημα 4.7.** Έστω μια θετικά επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου τύπου QBD, όπου οι πίνακες  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$  είναι άνω τριγωνικοί. Τότε ο πίνακας  $G$  είναι άνω τριγωνικός και τα στοιχεία του πίνακα μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά.

### Απόδειξη

Έχουμε αποδείξει στο θεώρημα 4.1 ότι ο παρακάτω αλγόριθμος που περιγράφεται μέσα από τις σχέσεις ( 4.6 ) - ( 4.8 ) συγκλίνει στον πίνακα  $G$

$$\begin{aligned} G(0) &= \mathbf{0} \\ G(k) &= (I - A_1 + A_0 G(k-1))^{-1} A_2, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι οι πίνακες  $G(k)$  είναι άνω τριγωνικοί, για κάθε  $k \geq 1$ .

Προφανώς ο πίνακας  $G(1)$ , που δίνεται από την σχέση

$$G(1) = (I - A_1)^{-1} A_2,$$

είναι άνω τριγωνικός, εφόσον οι πίνακες  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$  είναι άνω τριγωνικοί. Έστω ότι ο πίνακας  $G(k-1)$  είναι άνω τριγωνικός. Θα αποδείξουμε ότι ο  $G(k)$  είναι άνω τριγωνικός. Παρατηρούμε ότι

$$G(k) = (I - A_1 + A_0 G(k-1))^{-1} A_2.$$

Όμως πράξεις μεταξύ άνω τριγωνικών πινάκων δίνουν τριγωνικό πίνακα, είτε πρόκειται για πρόσθεση, είτε για πολλαπλασιασμό. Επίσης ο αντίστροφος άνω τριγωνικού πίνακα, με την υπόθεση της μη μηδενικής ορίζουσας, είναι άνω τριγωνικός. Μέσα από αυτούς τους ισχυρισμούς έπεται άμεσα ότι ο πίνακας  $G(k)$  είναι άνω τριγωνικός, για κάθε  $k \geq 1$ . Τελικά ο πίνακας  $G = \lim_{k \rightarrow \infty} G(k)$  είναι άνω τριγωνικός. Έχουμε αποδείξει ότι ο πίνακας  $G = (g_{ij})_{i \leq j}$  ικανοποιεί την εξίσωση ( 4.14 ), έχουμε λοιπόν ότι

$$G = A_2 + A_1 G + A_0 G^2.$$

Σε επίπεδο στοιχείων η παραπάνω σχέση αναλύεται ως

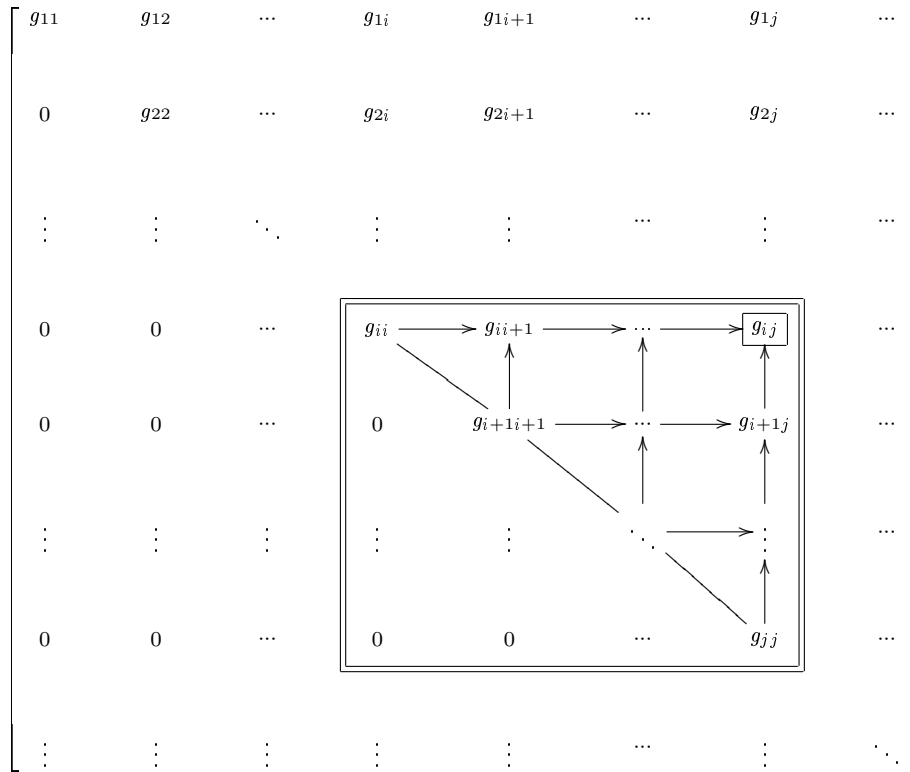
$$g_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{(2)} + \sum_{k=i}^j a_{ik}^{(1)} g_{kj} + \sum_{t=i}^j a_{it}^{(0)} \sum_{k=t}^j g_{tk} g_{kj} , & i \leq j \\ 0 , & i > j . \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο  $G$  είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης ( 4.14 ), ισοδύναμα γράφεται

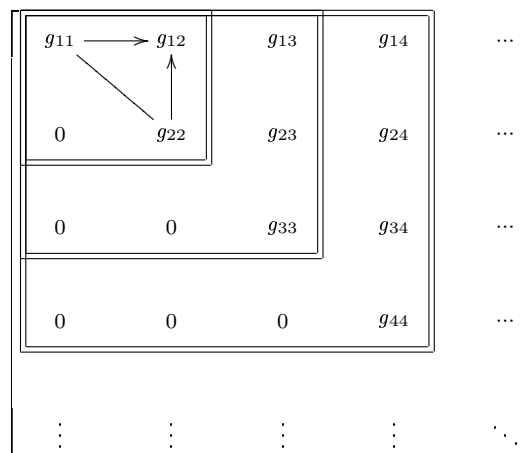
$$\begin{aligned} g_{ii} &= a_{ii}^{(2)} + a_{ii}^{(1)} g_{ii} + a_{ii}^{(0)} g_{ii}^2 \\ &= \frac{1 - a_{ii}^{(1)} - \sqrt{(1 - a_{ii}^{(1)})^2 - 4a_{ii}^{(0)} a_{ii}^{(2)}}}{2a_{ii}^{(0)}} \\ g_{i,i+1} &= a_{i,i+1}^{(2)} + \sum_{k=i}^{i+1} a_{ik}^{(1)} g_{k,i+1} + \sum_{t=i}^{i+1} a_{it}^{(0)} \sum_{k=t}^{i+1} g_{tk} g_{k,i+1} \\ &= a_{i,i+1}^{(2)} + a_{ii}^{(1)} g_{i,i+1} + a_{i,i+1}^{(1)} g_{i+1,i+1} \\ &\quad + a_{ii}^{(0)} (g_{ii} g_{i,i+1} + g_{i,i+1} g_{i+1,i+1}) + a_{i,i+1}^{(0)} g_{i+1,i+1}^2 \\ &= \frac{a_{i,i+1}^{(2)} + a_{i,i+1}^{(1)} g_{i+1,i+1} + a_{i,i+1}^{(0)} g_{i+1,i+1}^2}{1 - a_{ii}^{(1)} - a_{ii}^{(0)} (g_{ii} + g_{i+1,i+1})} \\ g_{i,i+\nu} &= a_{i,i+\nu}^{(2)} + \sum_{k=i}^{i+\nu} a_{ik}^{(1)} g_{k,i+\nu} + \sum_{t=i}^{i+\nu} a_{it}^{(0)} \sum_{k=t}^{i+\nu} g_{tk} g_{k,i+\nu} \\ &= a_{i,i+\nu}^{(2)} + a_{ii}^{(1)} g_{i,i+\nu} + \sum_{k=i+1}^{i+\nu} a_{ik}^{(1)} g_{k,i+\nu} \\ &\quad + a_{ii}^{(0)} \sum_{k=i}^{i+\nu} g_{ik} g_{k,i+\nu} + \sum_{t=i+1}^{i+\nu} a_{it}^{(0)} \sum_{k=t}^{i+\nu} g_{tk} g_{k,i+\nu} \\ &= \frac{a_{i,i+\nu}^{(2)} + \sum_{k=i+1}^{i+\nu} a_{ik}^{(1)} g_{k,i+\nu} + a_{ii}^{(0)} \sum_{k=i+1}^{i+\nu-1} g_{ik} g_{k,i+\nu} + \sum_{t=i+1}^{i+\nu} a_{it}^{(0)} \sum_{k=t}^{i+\nu} g_{tk} g_{k,i+\nu}}{1 - a_{ii}^{(1)} - a_{ii}^{(0)} (g_{ii} + g_{i+\nu,i+\nu})} \end{aligned}$$

Στην απόδειξη του παραπάνω αλγόριθμου δεν μας απασχόλησε αν οι πίνακες  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$  είναι πεπερασμένοι ή όχι. □

Η μεθοδολογία του παραπάνω αλγόριθμου, για την εύρεση του στοιχείου  $g_{ij}$ ,  $j \geq i$ , του πίνακα  $G$ , συνοψίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ενώ ο πίνακας  $G$  θα υπολογιστεί μέσω των επάλληλων μπλοκ πινάκων όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



### 4.3 Η περίπτωση του συνεχούς χρόνου

Θα δείξουμε στην παράγραφο αυτή πως τροποποιούνται οι αλγόριθμοι εύρεσης του πίνακα  $G$  όταν αναφερόμαστε σε αλυσίδες τύπου QBD συνεχούς χρόνου.

**Θεώρημα 4.8.** *Οι ακολουθίες  $\{U(k), k \geq 1\}$  και  $\{G(k), k \geq 1\}$  οριζόμενες ως*

$$\begin{aligned}U(1) &= A_1 \\G(k) &= (-U(k))^{-1}A_2 \\U(k+1) &= A_1 + A_0G(k),\end{aligned}$$

για  $k \geq 1$ , συγκλίνουν στους πίνακες  $U$  και  $G$ , αντίστοιχα. Η ακολουθία  $\{G(k), k \geq 1\}$  είναι μονότονη.

Η απόδειξη του θεωρήματος 4.8 είναι ανάλογη της απόδειξης του θεωρήματος 4.1, όπου  $G(k)$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης από το επίπεδο  $\ell(n)$  στο  $\ell(n+1)$ , χωρίς να περάσει από το επίπεδο  $\ell(n+k)$ , για κάθε  $n \geq 1$ .

#### 4.4 Άλλοι αλγόριθμοι υπολογισμού του πίνακα $R$

Αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι οι θετικά επαναληπτικές διαδικασίες τύπου QBD έχουν πίνακο-γεωμετρική στάσιμη κατανομή, για τον υπολογισμό της οποίας είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός του πίνακα  $R$  ή του πίνακα  $G$ . Ο πίνακας  $R$ , για αλυσίδες διακριτού χρόνου, προσδιορίζεται ως η ελάχιστη μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$R = A_0 + RA_1 + R^2 A_2 . \quad (3.14)$$

Μόλις υπολογιστεί ο πίνακας  $R$ , όλα τα υπόλοιπα μέτρα που μας ενδιαφέρουν υπολογίζονται συναρτήσει αυτού. Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις αποδείξαμε ότι ο υπολογισμός του πίνακα γίνεται άμεσα. Όμως οι περιπτώσεις αυτές είναι αρκετά σπάνιες, και στην ουσία η προσέγγιση του πίνακα γίνεται αλγοριθμικά. Ξεκινάμε από μια ορισμένη προσέγγιση του πίνακα  $R$ , έστω την  $R(0)$  και την βελτιώνουμε μέσω μιας καλά ορισμένης ακολουθίας  $R(k)$ . Η μέθοδος που συνήθως προτιμάται είναι αυτή της διαδοχικής αντικατάστασης. Αυτό επιτυγχάνεται τροποποιώντας την εξίσωση  $R = A_0 + A_1 R + A_2 R^2$  ως

$$R(k+1) = A_0 + R(k)A_1 + R^2(k)A_2 .$$

Συνήθως θέτουμε  $R(0) = \mathbf{0}$  ή ισοδύναμα  $R(1) = A_0$ . Ο αλγόριθμος αυτός ονομάστηκε από τον Latouche ως “φυσικός” αλγόριθμος. Θέτοντας ως αρχική συνθήκη την  $R(0) = \mathbf{0}$  είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η ακολουθία  $\{R(k), k \geq 0\}$  είναι αύξουσα και συγκλίνει σε έναν μη αρνητικό πίνακα, έστω  $X$ . Αποδείχθηκε από τον Neuts ότι ο πίνακας  $X$  αποτελεί λύση της εξίσωσης ( 3.14 ) και μάλιστα ελάχιστη, συνεπώς  $X = R$ .

Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να βελτιωθεί, εφόσον ο πίνακας  $I - A_1$  είναι αντιστρέψιμος.

$$\begin{aligned} R &= A_0 + RA_1 + R^2 A_2 \\ R(I - A_1) &= A_0 + R^2 A_2 \\ R &= (A_0 + R^2 A_2)(I - A_1)^{-1} \end{aligned}$$

Ο νέος αλγόριθμος

$$R(k+1) = (A_0 + R^2(k)A_2)(I - A_1)^{-1}$$

αποδείχθηκε από τον Latouche ότι απαιτεί μικρότερο πλήθος επαναλήψεων προκειμένου να επιτύχει σύγκλιση. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάστηκε από τον Latouche “παραδοσιακός” αλγόριθμος. Σε αντίθεση με τον “φυσικό” αλγόριθμο ο νέος αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει ο πίνακας  $I - A_1$  να αντικατασταθεί από τον πίνακα  $-A_1$ .

Προτάθηκε από τον Latouche ένας ακόμη αλγόριθμος. Από την σχέση ( 3.14 ) έπεται ότι

$$R = A_0 + RA_1 + R^2A_2$$

$$R = A_0 + R(A_1 + RA_2)$$

$$R = A_0 + RU ,$$

όπου  $U = A_1 + RA_2$ . Εφόσον  $R = A_0 + RU$ , έπεται ότι

$$R(I - U) = A_0 \Rightarrow R = A_0(I - U)^{-1} .$$

Η ακόλουθη κατασκευαστική μέθοδος συγκλίνει στους πίνακες  $U$  και  $R$ .

$$U(k) = A_1 + R(k-1)A_2$$

$$R(k) = A_0(I - U(k))^{-1}$$

με αρχική συνθήκη την  $R(0) = \mathbf{0}$ . Ουσιαστικά η αναδρομική σχέση που χρησιμοποιούμε εδώ για την εύρεση του  $R(k+1)$  είναι η

$$R(k+1) = A_0(I - A_1 + R(k)A_2)^{-1} .$$

Ο Latouche απέδειξε με θεωρητική ανάλυση και με αριθμητικούς υπολογισμούς ότι ο αλγόριθμος που βασίζεται στον πίνακα  $U$  είναι καλύτερος και από τον “φυσικό” και τον “παραδοσιακό” αλγόριθμο.

Το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται, στους αλγόριθμους που έχουμε αναφέρει, προκειμένου να επιτύχουμε σύγκλιση είναι ιδιαίτερα μεγάλο και για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που μειώνουν το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων. Στα πλαίσια αυτά έχει αναπτυχθεί μια μέθοδος από τους Latouche και Ramaswami [4].

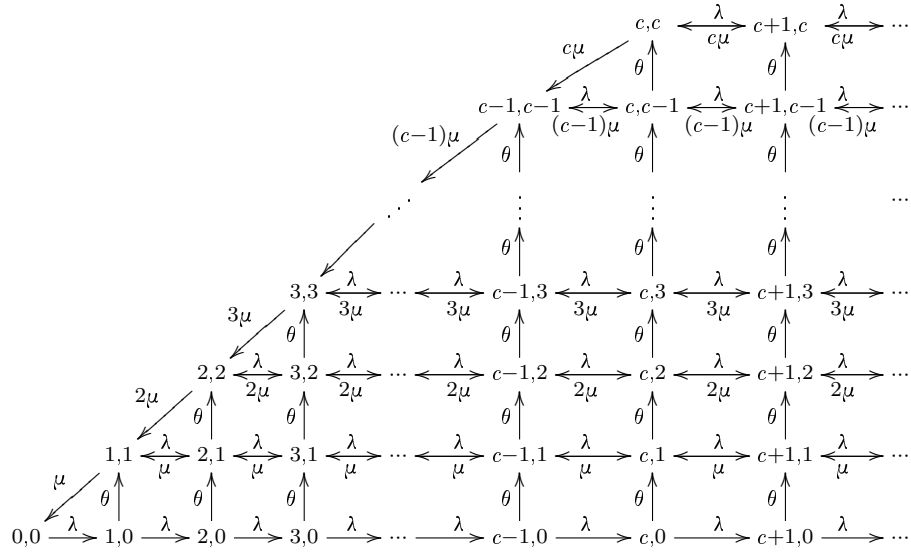


## Κεφάλαιο 5

# Εφαρμογές

### 5.1 Ουρά με πολλούς υπηρέτες και χρόνους ενεργοποίησης

Θεωρούμε μια  $M/M/c$  ουρά αναμονής στην οποία οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Οι πελάτες εξυπηρετούνται από  $c$  υπηρέτες, ο καθένας από τους οποίους εξυπηρετεί σε εκθετικό χρόνο παραμέτρου  $\mu$  ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Οι πλεονάζοντες υπηρέτες μόλις αδειάσει η ουρά απενεργοποιούνται ακαριαία. Όταν αφίχνεται ένας πελάτης και βρίσκει τουλάχιστον ένα άδειο υπηρέτη απενεργοποιημένο, τότε ο διαχειριστής του συστήματος ενεργοποιεί τον υπηρέτη που όμως χρειάζεται εκθετικό χρόνο ενεργοποίησης παραμέτρου  $\theta$ . Ο διαχειριστής του συστήματος ενεργοποιεί έναν έναν τους υπηρέτες μέχρι τη στιγμή που το σύστημα θα αδειάσει. Στη περίπτωση που μετά την ολοκλήρωση μιας εξυπηρέτησης υπάρχει ένας πελάτης σε αναμονή τότε διακόπτεται η διαδικασία ενεργοποίησης και ο πελάτης σε αναμονή προχωράει σε εξυπηρέτηση στον ελεύθερο υπηρέτη. Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων, εξυπηρετήσεων και ενεργοποιήσεων είναι ανεξάρτητοι. Ορίζουμε  $Q(t)$  να είναι το πλήθος των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή  $t$  και  $N(t)$  να είναι το πλήθος των ενεργοποιημένων υπηρέτων τη χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$ . Τότε η στοχαστική διαδικασία  $\mathbf{Q}(t) = \{(Q(t), N(t)), t \geq 0\}$  είναι Μαρκοβιανή. Έστω  $Q$  το πλήθος των πελατών στο σύστημα,  $Q \in \mathbb{N}_0$  και  $N$  το πλήθος των ενεργοποιημένων υπηρέτων  $N \in \{0, 1, \dots, c\}$ . Θα αποκαλούμε τη μεταβλητή  $Q$  επίπεδο και τη μεταβλητή  $N$  φάση. Στόχος μας είναι η εύρεση του διανύσματος  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ , όπου  $\pi_i = (\pi_{i0}, \pi_{i1}, \dots, \pi_{ic})$  και  $\pi_{ij} = P[Q = i, N = j]$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, c\}$ . Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα μας είναι θετικά επαναληπτική. Η συνθήκη θετικής επαναληπτικότητας θα δοθεί στη συνέχεια. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι τύπου QBD, καθώς είναι δυνατές μεταβάσεις μόνο από ένα επίπεδο σε γειτονικά επίπεδα ή μέσα στο ίδιο επίπεδο. Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης δίνεται στη συνέχεια.



Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης έχει την ακόλουθη μορφή

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & \dots \\ B_{10} & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας  $A_0$  περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης προς το αμέσως ανώτερο επίπεδο, δεδομένου ότι  $Q > c$ . Οι μόνες δυνατές μεταβάσεις είναι της μορφής  $(i, j) \rightarrow (i + 1, j)$ , όταν γίνεται μια άφιξη. Συνοπτικά

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I .$$

Ο πίνακας  $A_2$  περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης προς το αμέσως κατώτερο επίπεδο, δεδομένου ότι  $Q > c$ . Οι μόνες δυνατές μεταβάσεις είναι της μορφής  $(i, j) \rightarrow (i - 1, j)$ , όταν ολοκληρώνεται μια εξυπηρέτηση με ρυθμό  $j\mu$ ,  $j > 0$ . Στη περίπτωση που δεν έχουν ακόμα ενεργοποιηθεί υπηρέτες δεν είναι δυνατό να γίνουν αναχωρήσεις. Συνοπτικά

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (c-1)\mu & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c\mu \end{bmatrix} .$$

Τέλος ο πίνακας  $A_1$  περιέχει όλους τους ρυθμούς παραμονής στο ίδιο επίπεδο, δεδομένου ότι  $Q > c$ . Οι μόνες δυνατές μεταβάσεις είναι της μορφής  $(i, j) \rightarrow (i, j + 1)$ , όταν ενεργοποιείται ένας υπηρέτης με ρυθμό  $\theta$ . Συνοπτικά

$$A_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta) & \theta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu + \theta) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\lambda + (c-1)\mu + \theta) & \theta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\lambda + c\mu) \end{bmatrix} .$$

Τότε από το θεώρημα 3.7 έπεται ότι η στάσιμη κατανομή δίνεται από την σχέση

$$\pi_n^T = \pi_{c+1}^T R^{n-(c+1)}, \quad \forall n \geq c+1 \quad (3.15)$$

όπου ο πίνακας  $R$  υπολογίζεται από τις σχέσεις ( 3.8 ) και ( 3.10 ), ως  $R = A_0(-A_1 - A_0G)^{-1}$  και ο πίνακας  $G$  βρίσκεται ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$A_2 + A_1X + A_0X^2 = \mathbf{0} .$$

Τα διανύσματα  $\pi^{*T} = (\pi_0^T \ \pi_1^T \ \dots \ \pi_c^T)$  και  $\pi_{c+1}^T$  θα βρεθούν ως η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\left( \begin{array}{cc} \pi^{*T} & \pi_{c+1}^T \end{array} \right) \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 + RA_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} ,$$

$$\pi^{*T} \mathbf{1} + \pi_{c+1}^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1 .$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες  $A_0$ ,  $A_1$  και  $A_2$  είναι τριγωνικοί, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο εύρεσης του πίνακα  $G$  που αναπτύχθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.7. Αρχικά υπολο-

γίζουμε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $G$ .

Στη περίπτωση που  $i = c$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{cc} &= \frac{-a_{ii}^{(1)} - \sqrt{(a_{ii}^{(1)})^2 - 4a_{ii}^{(0)}a_{ii}^{(2)}}}{2a_{ii}^{(0)}} \\ &= \frac{\lambda + c\mu - \sqrt{(\lambda + c\mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2c\mu} \\ &= \frac{\lambda + c\mu - |\lambda - c\mu|}{2c\mu} = \min\left\{\frac{\lambda}{c\mu}, 1\right\}. \end{aligned}$$

Για  $i = 0$  έχουμε από τη σχέση  $A_2 + A_1G + A_0G^2 = \mathbf{0}$  ότι

$$\begin{aligned} 0 &= a_{00}^{(2)} + a_{00}^{(1)}g_{00} + a_{00}^{(0)}g_{00}^2 \\ 0 &= -(\lambda + \theta)g_{00} + \lambda g_{00}^2 \\ g_{00} &= \frac{\lambda}{\lambda + \theta}. \end{aligned}$$

Τέλος, για  $i = 1, 2, \dots, c-1$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \frac{-a_{ii}^{(1)} - \sqrt{(a_{ii}^{(1)})^2 - 4a_{ii}^{(0)}a_{ii}^{(2)}}}{2a_{ii}^{(0)}} \\ &= \frac{\lambda + i\mu + \theta - \sqrt{(\lambda + i\mu + \theta)^2 - 4\lambda i\mu}}{2i\mu}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας  $G$  προκύπτει ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης  $A_2 + A_1G + A_0G^2 = \mathbf{0}$  στο σύνολο των μη αρνητικών πινάκων, ως εκ τούτου θεωρούμε ότι  $g_{cc} = \frac{\lambda}{c\mu}$  από τη σχέση αυτή παίρνουμε τη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος,  $\lambda < c\mu$ . Επιπλέον τα στοιχεία του πίνακα  $G$  εκφράζουν πιθανότητες και άρα απαιτούμε  $0 \leq g_{ij} \leq 1$ . Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + i\mu + \theta - \sqrt{(\lambda + i\mu + \theta)^2 - 4\lambda i\mu}}{2i\mu} &< 1 \\ \sqrt{(\lambda + i\mu + \theta)^2 - 4\lambda i\mu} &> -2i\mu + \lambda + i\mu + \theta \\ (\lambda + i\mu + \theta)^2 - 4\lambda i\mu &> (\lambda - i\mu + \theta)^2 \\ (\lambda - i\mu + \theta)^2 + 4\lambda i\mu + 4\theta i\mu - 4\lambda i\mu &> (\lambda - i\mu + \theta)^2 \\ \theta i\mu &> 0 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει πάντα. Τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα  $G$  θα υπολογιστούν συναρτήσει των διαγώνιων στοιχείων. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
g_{i,i+1} &= \frac{a_{i,i+1}^{(2)} + a_{i,i+1}^{(1)}g_{i+1,i+1} + a_{i,i+1}^{(0)}g_{i+1,i+1}^2}{-a_{ii}^{(1)} - a_{ii}^{(0)}(g_{ii} + g_{i+1,i+1})} \\
&= \frac{\theta g_{i+1,i+1}}{\lambda + i\mu + \theta - \lambda(g_{ii} + g_{i+1,i+1})}, \quad i = 0, 1, \dots, c-1 \\
g_{i,i+\nu} &= \frac{a_{i,i+\nu}^{(2)} + \sum_{k=i+1}^{i+\nu} a_{ik}^{(1)}g_{k,i+\nu} + a_{ii}^{(0)} \sum_{k=i+1}^{i+\nu-1} g_{ik}g_{k,i+\nu} + \sum_{t=i+1}^{i+\nu} a_{it}^{(0)} \sum_{k=t}^{i+\nu} g_{tk}g_{k,i+\nu}}{-a_{ii}^{(1)} - a_{ii}^{(0)}(g_{ii} + g_{i+\nu,i+\nu})} \\
&= \frac{\theta g_{i+1,i+\nu} + \lambda \sum_{k=i+1}^{i+\nu-1} g_{ik}g_{k,i+\nu}}{\lambda + i\mu + \theta - \lambda(g_{ii} + g_{i+\nu,i+\nu})}.
\end{aligned}$$

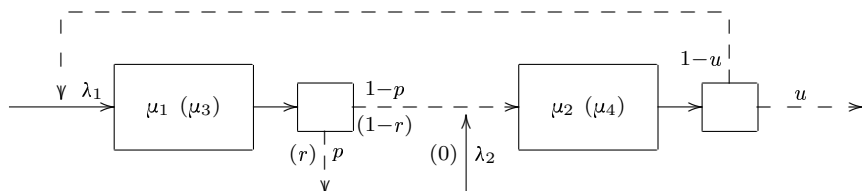
Με τον τρόπο αυτό αναδρομικά υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα  $G$ . Υπολογίζουμε τέλος τον πίνακα  $R$  μέσω της σχέσης  $R = A_0(-A_1 - A_0G)^{-1} = \lambda(-A_1 - \lambda G)^{-1}$ . □

## 5.2 Δίκτυο δυο σταθμών με κινούμενους υπηρέτες, παρεμπόδιση και απώλειες πελατών

Θεωρούμε δυο σταθμούς, στον καθένα από τους οποίους οι εξυπηρετήσεις γίνονται σε εκθετικό χρόνο. Κάθε σταθμός έχει τον δικό του χώρο αναμονής, η ουρά 1 είναι άπειρης χωρητικότητας ενώ η ουρά του σταθμού 2 είναι πεπερασμένη και μόνο  $N - 1$  πελάτες μπορούν να βρίσκονται στο χώρο αναμονής και το χώρο εξυπηρέτησης. Οι αφίξεις στο δίκτυο είναι Poisson και οι ρυθμοί αφίξεων είναι  $\lambda_i$  για κάθε σταθμό  $i = 1, 2$ . Μόλις ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση στο σταθμό 1 ο πελάτης αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα  $p$  ή συνεχίζει στο σταθμό 2 με πιθανότητα  $1 - p$ . Ανάλογα ο πελάτης ολοκληρώνοντας την εξυπηρέτηση του στο σταθμό 2 είτε αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα  $u$  είτε συνεχίζει στο σταθμό 1 με πιθανότητα  $1 - u$ . Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι  $\mu_i$  για τον σταθμό  $i = 1, 2$ . Όμως αν ο υπηρέτης 1 είναι ελεύθερος ή μπλοκαρισμένος βοηθάει τον υπηρέτη 2 ανεβάζοντας τον ρυθμό σε  $\mu_4$ . Ανάλογα αν ο υπηρέτης 2 είναι ελεύθερος βοηθάει τον υπηρέτη 1 ανεβάζοντας τον ρυθμό σε  $\mu_3$ . Στη περίπτωση που οι  $N - 1$  θέσεις της δεύτερης ουράς είναι κατειλημμένες δεν είναι δυνατό να γίνουν άλλες αφίξεις από το εξωτερικό, όμως είναι δυνατό κάποιος πελάτης ολοκληρώνοντας την εξυπηρέτηση του στο σταθμό 1 να συνεχίσει να παραμένει στο σύστημα χωρίς να μπορεί να μεταβεί στο δεύτερο σταθμό, συνεπώς ο πελάτης αυτός θα παραμένει στο πρώτο σταθμό παρεμποδίζοντας τις υπόλοιπες εξυπηρετήσεις. Δεδομένου ότι κάτι τέτοιο δεν είναι επιθυμητό θεωρούμε ότι, όταν στο δεύτερο σταθμό βρίσκονται  $N - 1$  πελάτες, η πιθανότητα να αναχωρήσει ένας πελάτης από το δίκτυο μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του στο σταθμό 1 μεταβάλλεται από  $p$  σε  $r$ , όπου  $r > p$ . Για λόγους διευκόλυνσης θα ορίσουμε ότι ο μπλοκαρισμένος πελάτης ανήκει στα άτομα του δεύτερου σταθμού. Συνεπώς ο χώρος καταστάσεων θα είναι της μορφής

$$S = \{(\ell, m) : \ell \in \mathbb{N}_0, m \in \{0, 1, \dots, N\}\} .$$

Σχηματικά το μοντέλο μας περιγράφεται ως:



Ορίζουμε  $Q_i(t)$  να είναι το πλήθος των πελατών στο σταθμό  $i = 1, 2$  τη χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$ . Τότε η στοχαστική διαδικασία  $\mathbf{Q}(t) = \{(Q_1(t), Q_2(t)), t \geq 0\}$  είναι Μαρκοβιανή. Έστω  $Q_i$  το πλήθος των

πελατών στο σταθμό  $i = 1, 2$ ,  $Q_1 \in \mathbb{N}_0$  και  $Q_2 \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Θα αποκαλούμε τη μεταβλητή  $Q_1$  επίπεδο και τη μεταβλητή  $Q_2$  φάση. Στόχος μας είναι η εύρεση του διανύσματος  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ , όπου  $\pi_i = (\pi_{i0}, \pi_{i1}, \dots, \pi_{iN})$  και  $\pi_{ij} = P[Q_1 = i, Q_2 = j]$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα μας είναι θετικά επαναληπτική. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι τύπου QBD, καθώς είναι δυνατές μεταβάσεις μόνο από ένα επίπεδο σε γειτονικά επίπεδα ή μέσα στο ίδιο επίπεδο. Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης έχει την ακόλουθη μορφή

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A_0$  περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης προς το αμέσως ανώτερο επίπεδο, δεδομένου ότι  $Q_1 > 0$ . Οι δυνατές μεταβάσεις είναι είτε της μορφής  $(\ell, m) \rightarrow (\ell + 1, m - 1)$ , όταν ολοκληρώνεται μια εξυπηρέτηση στο σταθμό 2 ( $0 < Q_2 < N$ ) με ρυθμό  $\mu_2$  και ο εξυπηρετούμενος πελάτης με πιθανότητα  $1 - u$  συνεχίζει στο σταθμό 1, είτε της μορφής  $(\ell, m) \rightarrow (\ell + 1, m)$  όταν γίνεται μια εξωτερική άφιξη στο σταθμό 1 ( $0 \leq Q_2 \leq N$ ). Όταν  $Q_2 = N$  τότε ο σταθμός 1 είναι μπλοκαρισμένος και ο υπηρέτης 1 βοηθάει τον υπηρέτη 2 συνεπώς ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι  $\mu_4$  και άρα μεταβάσεις της μορφής  $(\ell, N) \rightarrow (\ell - 1, N)$  γίνονται με ρυθμό  $(1 - u)\mu_4$ . Συνοπτικά

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (1 - u)\mu_2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - u)\mu_2 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - u)\mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1 - u)\mu_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (1 - u)\mu_4 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $B_{01}$  βρίσκεται ανάλογα και μάλιστα προκύπτει ότι έχει την ίδια δομή με τον  $A_0$  αν αντικαταστήσουμε τους ρυθμούς  $\mu_2$  από τους ρυθμούς  $\mu_4$ .

Ο πίνακας  $A_2$  περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης προς το αμέσως κατώτερο επίπεδο, δεδομένου

ότι  $Q_1 > 0$ . Οι δυνατές μεταβάσεις είναι είτε της μορφής  $(\ell, m) \rightarrow (\ell - 1, m)$ , όταν ολοκληρώνεται μια εξυπηρέτηση στο σταθμό 1 ( $0 < Q_2 < N - 1$ ) με ρυθμό  $\mu_1$  και ο εξυπηρετούμενος πελάτης με πιθανότητα  $p$  αναχωρεί από το σύστημα, όταν  $Q_2 = N - 1$  με ρυθμό  $\mu_1$  και ο εξυπηρετούμενος πελάτης με πιθανότητα  $r$  αναχωρεί από το σύστημα, είτε της μορφής  $(\ell, m) \rightarrow (\ell - 1, m + 1)$ , όταν ολοκληρώνεται μια εξυπηρέτηση στο σταθμό 1 ( $0 < Q_2 < N$ ) με ρυθμό  $\mu_1$  και ο εξυπηρετούμενος πελάτης με πιθανότητα  $1 - p$  συνεχίζει στο σταθμό 2, όταν  $Q_2 = N - 1$  με ρυθμό  $\mu_1$  και ο εξυπηρετούμενος πελάτης με πιθανότητα  $1 - r$  συνεχίζει στο σταθμό 2. Όταν  $Q_2 = N$  τότε ο σταθμός 1 είναι μπλοκαρισμένος και ο υπηρέτης 1 βοηθάει τον υπηρέτη 2 συνεπώς οι μεταβάσεις της μορφής  $(\ell, N) \rightarrow (\ell - 1, N(-1))$  γίνονται με ρυθμό 0. Όταν  $Q_2 = 0$  τότε ο σταθμός 2 είναι άδειος και ο υπηρέτης 2 βοηθάει τον υπηρέτη 1 συνεπώς οι μεταβάσεις της μορφής  $(\ell, 0) \rightarrow (\ell - 1, 0)$  γίνονται με ρυθμό  $p\mu_3$ , ενώ οι μεταβάσεις της μορφής  $(\ell, 0) \rightarrow (\ell - 1, 1)$  γίνονται με ρυθμό  $q\mu_3$ . Συνοπτικά

$$A_2 = \begin{bmatrix} p\mu_3 & (1-p)\mu_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\mu_1 & (1-p)\mu_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\mu_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r\mu_1 & (1-r)\mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Τότε από το θεώρημα 3.7 έπεται ότι η στάσιμη κατανομή δίνεται από την σχέση

$$\pi_n^T = \pi_1^T R^{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \quad (3.15)$$

όπου ο πίνακας  $R$  υπολογίζεται από τις σχέσεις ( 3.8 ) και ( 3.10 ),  $R = A_0(-A_1 - A_0G)^{-1}$  και ο πίνακας  $G$  βρίσκεται ως η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$A_2 + A_1X + A_0X^2 = \mathbf{0} .$$

Τα διανύσματα  $\pi_0$  και  $\pi_1$  θα βρεθούν ως η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\left( \begin{array}{cc} \pi_0^T & \pi_1^T \end{array} \right) \left[ \begin{array}{cc} B_{00} & B_{01} \\ A_2 & A_1 + RA_2 \end{array} \right] = \mathbf{0} ,$$

$$\pi_0^T \mathbf{1} + \pi_1^T (I - R)^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1} .$$



Ο πίνακας  $G$  θα υπολογιστεί μέσω του αλγόριθμου

$$\begin{aligned}G(0) &= \mathbf{0} \\G(k+1) &= (-A_1 - A_0G(k))^{-1}A_2 .\end{aligned}$$

□







# Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [1] J. R. Artalejo, A. Economou και M. J. Lopez-Herrero Analysis of a multiserver queue with setup times.
- [2] J. Abate, G. L. Choudhury και W. Whitt An introduction to numerical tranform inversion and its application to probability models. *Computational Probability*. W. K. Grassmann, Editor, Kluwer Academic Publishers, 2000
- [3] D. A. Bini, G. Latouche και B. Meini *Numerical Methods for Structured Markov Chains*. Oxford Science Publications, 2005
- [4] W. K. Grassmann *Computational Probability*. Kluwer Academic Publishers, 2000
- [5] W. K. Grassmann και J. Tavakoli Two-station networks with moving servers, blocking, and customer loss. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2005
- [6] G. Latouche και V. Ramaswami *A General Class of Markov Processes with Explicit Matrix-Geometric Solutions*. OR Spektrum, 1986
- [7] G. Latouche και V. Ramaswami *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*. ASA-Siam Series on Statistics and Applied Probability, 1999
- [8] M.F. Neuts Markov chains with application in queueing theory, which have a matric-geometric invariant vector. *Adv. in Applied Probability*, 1978
- [9] M.F. Neuts Renewal processes of phase type. *Naval Res. Logist.*, 1979
- [10] M.F. Neuts *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and their Applications*. Marcel Dekker, 1989
- [11] M.F. Neuts *Algorithmic Probability*. Stochastic modeling series, Chapman & Hall, 1995

- [12] M. F. Neuts και M. Yadin The transient behavior of the queue with alternating priorities, with special reference to the waiting times. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 1968
- [13] M. F. Neuts *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981
- [14] M. F. Neuts *An algorithmic probabilist's apology*. In *The Craft of Probabilistic Modelling: A Collection of Personal Accounts*. J. Gani, Editor, Springer-Verlag, New York, 1986
- [15] M. F. Neuts The caudal characteristic curve of queues. *Adv. Appl. Prob.* 18, 1986
- [16] M. F. Neuts Computer experimentation in applied probability. In *A Celebration of Applied Probability. Special volume (25A) of J. Appl. Prob.*, J. Gani, Editor, 1988
- [17] M. F. Neuts Probabilistic modelling requires a certain imagination. In *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 3)*, August, 1990, Dunedin, New Zealand, D. Vere-Jones, Editor, Vol. 2, 1990
- [18] M. F. Neuts Algorithmic probability: a survey and a forecast. In *Proceedings of the Second Conference of the Association of Asian-Pacific Operational Research Societies*, Beijing, Cang-Pu Wu, Editor, Peking University Press, 1992
- [19] M. F. Neuts Matrix-analytic methods in queueing theory. In *Advances in queueing*, J. Dshalalow, Editor, Probab. Stochastics Ser., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995
- [20] W. J. Stewart *Numerical Solution of Markov Chains*. Marcel Dekker, 1991
- [21] W. J. Stewart *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*. Princeton University Press, 1994
- [22] W. J. Stewart *Computations with Markov Chains*. Kluwer Academic Publishers, 1995
- [23] R. W. Wolff *Stochastic Modeling and the theory of queues*. Prentice Hall, 1989

# Ελληνική Βιβλιογραφία

[1] Δ. Φακίνος *Ουρές Αναμονής*, Αθήνα

[2] Δ. Φακίνος *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Αθήνα







