ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΚΥΡΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (2006–07)
Συναρτησιακές Ανισότητες ΙΙ

1. Έστω f και g μετρήσιμες συναρτήσεις ορισμένες στον $\mathbb{R}^n$. Με $f\Box g$ συμβολίζουμε την **ελαχιστική συνέλιξη** των f και g,

$$(f\Box g)(x) = \inf\{f(x-y)+g(y):\ y\in\mathbb{R}^n\}.$$

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω w θετική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το ζευγάρι (μ, w) έχει την **ιδιότητα** (τ) αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση ϕ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\left(\int e^{\phi\Box w}d\mu\right)\left(\int e^{-\phi}d\mu\right)\leq 1.$$

(α) Δείξτε ότι: αν το (μ_i, w_i) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_i}$ για $i=1,2$, τότε το $(\mu_1\otimes\mu_2, w)$ έχει την (τ) στον $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, όπου $w(x_1,x_2)=w_1(x_1)+w_2(x_2)$.

(β) Δείξτε ότι: αν το (μ_i, w_i) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$ για $i=1,2$, τότε το ζευγάρι $(\mu_1 * \mu_2, w_1\Box w_2)$ έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$, όπου η συνέλιξη $\mu_1*\mu_2$ των μ_1,μ_2 ορίζεται μέσω της

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\, d(\mu_1*\mu_2) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)d\mu_1(x)d\mu_2(y).$$

(γ) Έστω ότι το (μ_1, w_1) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_1}$. Έστω $w:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}$ θετική μετρήσιμη συνάρτηση και $f:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^{n_2}$ συνάρτηση με την ιδιότητα

$$w_2(f(x)-f(y))\leq w_1(x-y)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^{n_1}$. Έστω μ_2 το μέτρο πιθανότητας $f(\mu_1)$ στον $\mathbb{R}^{n_2}$, δηλαδή $\mu_2(A)=\mu_1(f^{-1}(A))$. Δείξτε ότι το ζυγάρι (μ_2, w_2) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_2}$.

2. Υποθέτουμε ότι το ζευγάρι (μ, w) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ και κάθε θετικό αριθμό t,

$$\mu\left(x\notin A+\{w<t\}\right)\leq(\mu(A))^{-1}e^{-t}.$$

3. (α) Δείξτε ότι το ζευγάρι $(\gamma_n, \|x\|_2^2/4)$ έχει την ιδιότητα (τ).

(β) Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1. Δείξτε ότι: για κάθε $t>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\exp\left(\frac{t(f(x)-f(y))}{\sqrt{2}}\right)\right)d\gamma_n(x)\,d\gamma_n(y)\leq e^{t^2/2}.$$

(γ) Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1. Δείξτε ότι

$$\gamma\left(x:\left|f(x)-\int_{\mathbb{R}^n}fd\gamma\right|>s\right)\leq 2e^{-s^2/4}$$

για κάθε $s>0$.

4. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $W(t)=t^2/18$ αν $|t|\leq 2$ και $W(t)=2(|t|-1)/9$ αν $|t|>2$ (παρατηρήστε ότι η W είναι άρτια, κυρτή, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση). Θεωρούμε επίσης το μέτρο πιθανότητας μ_e στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα την $\chi_{(0,+\infty)}(x)e^{-x}$.

Δείξτε ότι το ζευγάρι (μ_e, w) έχει την ιδιότητα (τ).

(β) Έστω ξ το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα την $\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Θεωρήστε τη συμμετρική εικόνα μ_e' του μ_e στο $(-\infty,0)$, με πυκνότητα την $\chi_{(-\infty,0)}(x)e^{x}$ και ελέγξτε ότι

$$\xi=\mu_e*\mu_e'.$$

(γ) Δείξτε ότι το ζευγάρι $(\xi, W\Box W)$ έχει την ιδιότητα (τ).

(δ) Δείξτε οτι η $U := W\Box W$ δίνεται από την $U(t) = t^2/36$ αν $|t| \leq 4$ και $U(t) = 2(|t|-2)/9$ αν $|t| > 4$.

(ε) Δείξτε ότι το ζευγάρι (ξ_n, U_n) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$, όπου $\xi_n = \xi \otimes \cdots \otimes \xi$ (n φορές) και $U_n(x) = U_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n U(x_i)$.

(στ) Δείξτε ότι, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,

$$\xi_n(x \notin A + 6\sqrt{t}B_2^n + 9tB_1^n) \leq \frac{1}{\xi_n(A)} e^{-t}.$$