ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΚΥΡΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (2006–07)

Συναρτησιακές Ανισότητες

1. Έστω $p > 0$ και $\lambda \in (0,1)$. Αν $x, y > 0$ θέτουμε

$$M_p^\lambda(x,y) = (\lambda x^p + (1-\lambda)y^p)^{1/p}.$$

Αν $x, y \geq 0$ και $xy = 0$ θέτουμε $M_p^\lambda(x,y) = 0$.
(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{p\to 0^+} M_p^\lambda(x,y) = x^\lambda y^{1-\lambda}.$$

(β) Δείξτε ότι αν $x, y, z, w \geq 0$, $a, b, \gamma > 0$ και $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\gamma}$, τότε

$$M_a^\lambda(x,y) \cdot M_b^\lambda(z,w) \geq M_\gamma^\lambda(xz, yw).$$

(γ) Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $p > 0$, $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq M_p^\lambda(f(x), g(y)).$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq M^\lambda_{\frac{p}{pn+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f, \int_{\mathbb{R}^n} g\right).$$

2. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : K \to \mathbb{R}^+$. Λέμε ότι η f είναι α-**κοίλη** για κάποιον $\alpha > 0$ αν η $f^{1/\alpha}$ είναι κοίλη στο K. Δηλαδή, αν

$$f^{1/\alpha}(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq \lambda f^{1/\alpha}(x_1) + \mu f^{1/\alpha}(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in K$ και $\lambda, \mu > 0$ με $\lambda + \mu = 1$.
(α) Έστω $f, g : K \to \mathbb{R}^+$. Αν η f είναι α-κοίλη και η g είναι β-κοίλη, τότε η $f \cdot g$ είναι $(\alpha+\beta)$-κοίλη.
(β) Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$. Για κάθε $y \in P_{\theta^\perp}(K)$ συμβολίζουμε με I_y το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : y + t\theta \in K\}$ (παρατηρήστε ότι το I_y είναι διάστημα για κάθε $y \in P_{\theta^\perp}(K)$). Έστω $f : K \to \mathbb{R}^+$ μια συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε την *προβολή της f στη διεύθυνση του θ*: είναι η συνάρτηση

$$(P_\theta f)(y) := \int_{I_y} f(y + t\theta)dt, \quad y \in P_{\theta^\perp}(K).$$

Δείξτε ότι αν η f είναι α-κοίλη, τότε η $P_\theta f$ είναι $(1+\alpha)$-κοίλη. *Υπόδειξη*. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.
(γ) Έστω F ένας k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : F^\perp \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |K \cap (F + x)|^{1/k}$ είναι κοίλη στο φορέα της (αυτή είναι η γενική μορφή της αρχής του Brunn). *Υπόδειξη*. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του K είναι α-κοίλη για κάθε $\alpha > 0$! Θεωρήστε ορθοκανονική βάση $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ του F και, προβάλλοντας διαδοχικά την f στις διευθύνσεις θ_i, δείξτε ότι η $x \mapsto |K \cap (F + x)|$ είναι $(\alpha + k)$-κοίλη στο $P_{F^\perp}(K)$, για κάθε $\alpha > 0$.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\Delta f(z) = \sup\left\{\sqrt{f(x)f(-y)} : x, y \in \mathbb{R}^n,\, z = \frac{x+y}{2}\right\}.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(z)dz.$$

(α) Αν η f είναι λογαριθμικά κοίλη, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(z)dz \leq 2^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$