ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΚΥΡΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (2006–07)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3
(Ημερομηνία Παράδοσης: 11 Ιουνίου 2007)

1. Έστω $g_1, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
(α) Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$\|G\|_q := \left(\int_\Omega \Big\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \Big\|^q d\omega \right)^{1/q} = c_{n,q} M_q(X)$$

όπου

$$M_q(X) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^q d\sigma(x) \right)^{1/q},$$

και υπολογίστε τις σταθερές $c_{n,1}$ και $c_{n,2}$.
(β) Δείξτε ότι: αν $1 \leq k \leq n$,

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{i=1}^k g_i(\omega) e_i \Big\| d\omega \leq \int_\Omega \Big\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \Big\| d\omega.$$

(γ) Δείξτε ότι: αν Y είναι ένας k–διάστατος υπόχωρος του X, τότε

$$M_1(Y) \leq c\sqrt{n/k} M_1(X),$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

2. Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1 και έστω L ο μέσος Lévy της f.
(α) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$(\sigma \otimes \sigma)\big(\{(x,y) \in S^{n-1} : |f(x) - f(y)| \geq t\}\big) \leq 2\sigma\big(\{x : |f(x) - L| \geq t/2\}\big) \leq c_1 \exp(-c_2 t^2 n).$$

(β) Έστω $\mathbb{E}(f) = \int_{S^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x)$. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{S^{n-1}} \exp(a^2 |f(x) - \mathbb{E}(f)|^2)\, d\sigma(x) \leq \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \exp\left(a^2 (f(x) - f(y))^2\right) d\sigma(x)\, d\sigma(y).$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \exp\left(a^2 (f(x) - f(y))^2\right) d\sigma(x)\, d\sigma(y) \leq c a^2 \int_0^\infty t e^{a^2 t^2 - c t^2 n} dt,$$

και, επιλέγοντας, $a \simeq \sqrt{n}$, δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \exp\left(c_1 n (f(x) - f(y))^2\right) d\sigma(x)\, d\sigma(y) \leq c_2,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.
(δ) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\sigma\big(\{x : |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geq t\}\big) \leq c_3 \exp(-c_4 t^2 n),$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

3. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leq b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\max\left\{ M_1, c_1 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\} \leq M_q \leq \max\left\{ 2M_1, c_2 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\}$$

για κάθε $q \in [1,n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

(α) *Υπόδειξη για την δεξιά ανισότητα*: Η συνάρτηση $\|x\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma\big(x \in S^{n-1} : \big|\,\|x\| - M_1\big| > t\big) \leq 2\exp(-ct^2 n/b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$,

$$M_q - M_1 \leq \|\,\|x\| - M_1\,\|_q.$$

(β) *Υπόδειξη για την αριστερή ανισότητα*: Υπάρχει $z \in S^{n-1}$ ώστε $B_X \subset \{y : |\langle y, z\rangle| \leq 1/b\}$. Συνεπώς,

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geq t\} \supset C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geq t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιήστε την

$$M_q = \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(\{x : \|x\| \geq t\})dt\right)^{1/q} \geq \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(C_t)dt\right)^{1/q}.$$

4. (α) Έστω $x_1, \ldots, x_t \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S^{n-1}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{t} |\langle y, x_i\rangle| \geq \sqrt{t}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε όλα τα διανύσματα της μορφής $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i x_i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, και επιλέξτε ένα με τη μεγαλύτερη δυνατή Ευκλείδεια νόρμα.

5. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Έστω $t(X)$ ο μικρότερος φυσικός t για τον οποίο υπάρχουν $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{2}M\|x\|_2 \leq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \|U_i(x)\| \leq 2M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$t(X) \geq \frac{1}{4}(b/M)^2.$$

Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιους $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$. Θεωρήστε $x_0 \in S^{n-1}$ με $\|x_0\| = b$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4 για τα $x_i = U_i^{-1}(x_0)$.

6. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Υποθέτουμε ότι $v(B_X) \leq n^\alpha$ και $v(B_{Y^*}) \leq n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta \geq 1$. Δείξτε ότι

$$d(X,Y) \leq c\sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{n\log n}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να υποθέσετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n \subseteq B_Y \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $U \in O(n)$, $\|U^{-1} : Y \to X\| \leq n$ και

$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x \in B_X} \|Ux\|_Y = \max_{x \in \mathrm{Ext}(B_X)} \max_{y^* \in \mathrm{Ext}(B_{Y^*})} |\langle U(x), y^*\rangle|,$$

όπου $\mathrm{Ext}(A)$ είναι το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου A. Για σταθερά x, y και για $\varepsilon > 0$, εκτιμήστε το

$$\nu(U \in O(n) : |\langle U(x), y^*\rangle| \geq \varepsilon).$$

7. Έστω $1 \leq k \leq n$ και έστω $f_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}.$$

Δηλαδή, $f_k(x) = \|P_k(x)\|_2$, όπου P_k η ορθογώνια προβολή στον $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.
(α) Δείξτε ότι ο μέσος Lévy $\mathrm{med}(f_k)$ ικανοποιεί την

$$\mathrm{med}(f_k) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

αν $k \geq C \log n$, όπου $C > 0$ (αρκετά μεγάλη) απόλυτη σταθερά.
(β) Έστω $u \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι, για κάθε $t \in (0,1)$,

$$\nu_{n,k}(\{F \in G_{n,k} : |\, \|P_F(u)\|_2 - \mathrm{med}(f_k)| \geq t \cdot \mathrm{med}(f_k)\}) \leq c_1 \exp(-c_2 t^2 k).$$

(γ) Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχουν $k \leq c \log n$ (όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά) και $F \in G_{n,k}$ ώστε

$$\frac{1}{2}\mathrm{med}(f_k)\|x_i - x_j\|_2 \leq \|P_F(x_i) - P_F(x_j)\|_2 \leq 2\mathrm{med}(f_k)\|x_i - x_j\|_2$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

8. Έστω P ένα συμμετρικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $X = (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_P)$. Γράφουμε $f(P)$ για το πλήθος των $(n-1)$–διάστατων εδρών του και $v(P)$ για το πλήθος των κορυφών του.
(α) Δείξτε ότι $k(X) \leq \log f(P)$ και $k(X^*) \leq \log v(P)$.
(β) Δείξτε ότι $\log f(P) \log v(P) \geq cn$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

9. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και ότι $\mathrm{vr}(K) = A$.
(α) Δείξτε ότι

$$\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta)\nu(dU) = A^{2n}.$$

(β) Για κάθε $U \in O(n)$ θέτουμε $N_U(\theta) = \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2}$, $\theta \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{N_U(\theta)^{2n}}\, d\sigma(\theta) \leq A^{2n}$$

και συμπεράνατε ότι $N_U(\theta) \geq \frac{c}{A^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.
(γ) Αν ο U ικανοποιεί το (β), δείξτε ότι

$$B_2^n \subset K \cap U(K) \subset 8A^2 B_2^n.$$