ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΚΥΡΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (2006–07)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2
(Ημερομηνία Παράδοσης: 19 Μαΐου 2007)

1. Στον (απειροδιάστατο) γραμμικό χώρο c_0 των μηδενικών πραγματικών ακολουθιών ορίζουμε τις νόρμες

$$\|x\|_0 = \sup_n |x_n| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = \sup_n |x_n| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_{n+1}|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2}.$$

Θέτουμε $X_0 = (c_0, \|\cdot\|_0)$ και $X_1 = (c_0, \|\cdot\|_1)$.

(α) Δείξτε ότι ο X_0 είναι γνήσια κυρτός: αν $x, y \in X_0$ με $x \neq y$ και $\|x\|_0 = \|y\|_0 = 1$, τότε $\|\frac{x+y}{2}\|_0 < 1$.

(β) Δείξτε ότι ο X_1 δεν είναι γνήσια κυρτός και συμπεράνατε ότι ο X_0 και ο X_1 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(γ) Δείξτε ότι $d(X_0, X_1) = 1$, χρησιμοποιώντας την ακολουθία τελεστών $T_n : X_0 \to X_1$, όπου

$$T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots).$$

2. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι: αν $2 \leq p < q \leq +\infty$, τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

(α) Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι $d(\ell_2^n, \ell_q^n) \leq n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$.

(β) Δείξτε ότι: αν $y_1, \ldots, y_m \in \ell_2^n$ τότε

$$\sum_{j=1}^{m} \|y_j\|_2^2 = \mathrm{Ave}_{\varepsilon = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j y_j \right\|_2^2,$$

όπου με Ave συμβολίζουμε το μέσο όρο ως προς όλες τις δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$.

(γ) Έστω $2 \leq q \leq \infty$ και έστω $T : \ell_q^n \to \ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T : \ell_q^n \to \ell_2^n\| = 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|_2^2 \leq n^{2/q},$$

και συμπεράνατε ότι $\|Te_j\|_2 \leq n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}$ για κάποιον $j \leq n$. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, δείξτε ότι $\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_q^n\| \geq n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$.

(δ) Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι $d(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$.

(ε) Δείξτε ότι: αν $2 \leq p < q \leq +\infty$ τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

3. Οι πίνακες Walsh είναι ορθογώνιοι $2^k \times 2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά ως εξής: Θέτουμε $W_0 = [1]$, και

$$W_k = \begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 1.$$

(α) Δείξτε ότι ο $\frac{1}{2^{k/2}} W_k$ είναι ορθογώνιος πίνακας με την ιδιότητα: όλες του οι συντεταγμένες έχουν απόλυτη τιμή $\frac{1}{2^{k/2}}$.

(β) Έστω $n = 2^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο τελεστής που αντιστοιχεί στον $\frac{1}{2^{k/2}} W_k$.

1. Παρατηρήστε ότι $\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1$ και συμπεράνατε ότι $\|T^{-1} : \ell_\infty^n \to \ell_1^n\| \leq n$.
2. Παρατηρήστε ότι $\|Te_j\|_\infty = 1/\sqrt{n}$ για κάθε $j \leq n$ και συμπεράνατε ότι $\|T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leq \sqrt{n}$.

(γ) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leq c\sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Έστω $T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n$ ισομορφισμός, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\frac{1}{d} B_\infty^n \subseteq T(B_1^n) \subseteq B_\infty^n,$$

όπου B_∞^n, B_1^n οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_∞^n, ℓ_1^n αντίστοιχα.
(α) Αν $x_j = T(e_j)$, $j = 1, \dots, n$, δείξτε ότι

$$|T(B_1^n)| = \frac{2^n}{n!} |\det X|,$$

όπου X ο πίνακας με στήλες τα $x_1, \dots, x_n$. [*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $|B_1^n| = 2^n/n!$.]
(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x_1, \dots, x_n \in B_\infty^n$ και την ανισότητα του Hadamard, δείξτε ότι $|\det X| \leq n^{n/2}$.
(γ) Δείξτε ότι $d \geq c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από τον T και από το n.
(δ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \geq c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ η σταθερά στο (γ).

5. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1, \dots, u_m$ των K και B_2^n ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.
Υπόδειξη. Θεωρήστε το συμμετρικό κυρτό σώμα $L = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle u_j, y\rangle| \leq 1,\ j = 1, \dots, m\}$. Παρατηρήστε ότι $K \subseteq L$, οπότε αρκεί να δείξετε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του L. Θεωρήστε ελλειψοειδές

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i^{-2} \langle y, v_i\rangle^2 \leq 1\}$$

με $E \subseteq L$ και δείξτε ότι $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq n$, οπότε $\prod_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$.

6. Δίνονται $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j \otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι $\sum_{j=1}^m \|x_j\|_2^2 = n$.
(β) Δείξτε ότι: για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \dots, a_m$,

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^m a_j^2 \right)^{1/2}.$$

7. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Δείξτε ότι υπάρχει παραλληλεπίπεδο P ώστε $K \subseteq P$ και

$$|P| \leq 2^n \frac{n^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το «πρώτο λήμμα Dvoretzky–Rogers».

8. Έστω $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο $K = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle v_j, y\rangle| \leq 1,\ j = 1, \dots, m\}$ ικανοποιεί την $B_2^n \subseteq K \subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha > 1$. Δείξτε ότι $m \geq$

$\exp(n/(2\alpha^2))$. Με άλλα λόγια, αν η Ευκλείδεια μπάλα «προσεγγίζεται καλά» από ένα συμμετρικό κυρτό πολύεδρο, τότε αυτό πρέπει να έχει εκθετικό (ως προς τη διάσταση) πλήθος εδρών.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, έπονται τα εξής: (α) $\|v_j\|_2 \leq 1$ για κάθε $j \leq m$. (β) Αν $\theta \in S^{n-1}$, τότε το διάνυσμα $\alpha\theta$ δεν μπορεί να βρίσκεται στο εσωτερικό του K, συνεπώς, υπάρχει $j \leq m$ ώστε $|\langle v_j, \theta\rangle| \geq 1/\alpha$. Λόγω των δύο αυτών συνθηκών, μπορούμε να καλύψουμε την S^{n-1} με γεωδαισιακές μπάλες που έχουν κέντρα τα $v_j/\|v_j\|_2$ και ακτίνα που εξαρτάται μόνο από το α.

9. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $N \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^n$ και $T : X \to \ell_\infty^N$ με την ιδιότητα: $(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|T(x)\|_{\ell_\infty^n} \leq (1+\varepsilon)\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα ε-δίκτυο $\{x_1^*, \ldots, x_N^*\}$ στην B_{X^*} και τον τελεστή $T : X \to \ell_\infty^N$ με $T(x) = (x_1^*(x), \ldots, x_n^*(x))$.