6 Απριλίου 2009

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 2

(Παράδοση: 29 Απριλίου 2009)

1. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα

$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και

$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in X.$$

2. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Δείξτε ότι:

(α) Ο T^* είναι 1-1 αν και μόνο αν $\overline{T(X)} = Y$.

(β) Ο T είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T^* είναι επί.

(γ) Ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T είναι επί.

3. Θεωρούμε τον χώρο $\ell_\infty(\mathbb{R})$ των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ώστε, για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$,

$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n.$$

4. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Ο μηδενιστής του Y είναι το

$$Y^\perp = \{f \in X^* : \ \forall y \in Y, \ f(y) = 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $Y^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/Y^\perp$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y^*. Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/Y^\perp \to Y^*$ με $T(f + Y^\perp) = f|_Y$.
(β) Δείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $Y^\perp$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \to Y^\perp$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \to X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.

5. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα (πάνω από το $\mathbb{R}$).

(α) Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι φραγμένο.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν *κυρτά και πυκνά* σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε $A \cup B = X$ και $A \cap B = \emptyset$.

6. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, δείξτε ότι $f \in X^*$.

7. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι $|\cdot|$ είναι μια άλλη νόρμα στον W που είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον W. Δείξτε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X που είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ στον X και ο περιορισμός της στον W είναι η $|\cdot|$.

8. Θεωρούμε τον χώρο c των συγκλινουσών ακολουθιών, με νόρμα την $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την απεικόνιση $T : c \to c_0$ που ορίζεται ως εξής: αν $x = (x_n)$ με $x_n \to x_0$, τότε $T(x) = (x_0, x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots)$.]

(β) Δείξτε ότι οι c και c_0 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(γ) Δείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

9. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $y \in Y$ ο

$T_y : X \to Z$ με $T_y(x) = T(x,y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x,y)\| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

10. Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L_1[0,2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1[0,1]$ υπάρχει $\tilde{f} \in X$ ώστε $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in L_1[0,1]$, υπάρχει $\tilde{f} \in X$ με $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$ και $\|\tilde{f}\|_1 \leq M\|f\|_1$.

11. Έστω X χώρος με νόρμα και (x_n) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

12. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ ισχύει $g \circ T \in X^*$.

13. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$ στον Y, δείξτε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.

14. (α) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και ένα προς ένα τελεστής $T : X^* \to c_0$.

(β) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμική ισομετρία $T : X \to \ell_\infty$.

(γ) Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο τελεστή $S : \ell_1 \to Y$ υπάρχει φραγμένος τελεστής $W : \ell_1 \to X$ ώστε $T \circ W = S$.

15. Έστω X χώρος Banach και έστω $T : X \to X$ και $S : X^* \to X^*$ γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^*(Tx) = (Sx^*)(x)$. Τότε, οι T και S είναι φραγμένοι τελεστές.

16. Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X με $Y \cap Z = \{0\}$. Ορίζουμε

$$d(Y,Z) = \mathrm{dist}(S_Y, S_Z) = \inf\{\|y - z\| : y \in Y, z \in Z, \|y\| = \|z\| = 1\}.$$

Δείξτε ότι ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X αν και μόνο αν $d(Y,Z) > 0$.

17. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n : X \to Y$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $x_n \in X$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον X, τότε $T_n(x_n) \to 0$.

18. Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με τις εξής ιδιότητες: (α) ο T είναι επί, (β) υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geq \rho\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Παραδίδετε έντεκα από τις Ασκήσεις.