Το ℓ_1–θεώρημα του Rosenthal

Αφετηρία του θεωρήματος είναι το εξής πρόβλημα: να δοθούν προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες μια φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αυτό προκύπτει από το θεώρημα Eberlein-Smulian. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία.

Από την άλλη πλευρά, η κανονική βάση του ℓ_1 δεν έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία. Το ℓ_1–θεώρημα του Rosenthal λέει ότι αυτό ακριβώς είναι το ουσιαστικό εμπόδιο.

Θεώρημα (Rosenthal) Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach X. Τότε, ισχύει ένα από τα εξής:

(α) Η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία.

(β) Η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία που είναι βασική και είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί θεωρία Ramsey.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.
2. J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces.
3. H. P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ_1.