Το σύστημα Haar στον L_p, $1 < p < \infty$

Το σύστημα Haar είναι η ακολουθία συναρτήσεων $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $h_1 \equiv 1$ και αν $n = 2^k + s$ όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και $s = 1, 2, \dots, 2^k$, τότε $h_n(t) = \chi_{\left[\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}\right)}(t) - \chi_{\left[\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}\right)}(t)$. Δηλαδή, η h_n έχει φορέα το *δυαδικό διάστημα* $\left[\frac{s-1}{2^k}, \frac{s}{2^k}\right)$ και παίρνει τις τιμές 1 και -1 στο πρώτο και δεύτερο μισό του αντίστοιχα.

Αν $1 \leq p < \infty$, κανονικοποιούμε τις h_n στον L_p θεωρώντας τις $h_n / \|h_n\|_p = h_n / |I_n|^{1/p}$, όπου I_n ο φορέας της h_n. Το σύστημα Haar είναι μονότονη βάση στον L_p για κάθε $1 \leq p < \infty$.

Θεώρημα. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Θέτουμε $p^* = \max\{p, q\}$. Το σύστημα Haar είναι unconditional βάση στον $L_p[0,1]$ με σταθερά μικρότερη ή ίση από $p^* - 1$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \dots, a_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ισχύει

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j h_j \right\|_p \leq (p^* - 1) \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j h_j \right\|_p .$$

Αυτό αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τον Paley (1932). Ο Burkholder βρήκε την βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.
2. N. L. Carothers, A Short Course on Banach Space Theory.
3. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I and II.