Ο χώρος του James

Θεωρούμε τον χώρο J όλων των μηδενικών ακολουθιών $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ που έχουν φραγμένη τετραγωνική κύμανση. Δηλαδή, $x \in J$ αν $x(n) \to 0$ και υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε επιλογή φυσικών $1 \leq k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n} (x(k_j) - x(k_{j-1}))^2 \leq M^2.$$

Ο χώρος του James είναι ο J εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|x\|_0 = \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} (x(k_j) - x(k_{j-1}))^2 \right)^{1/2} \right\},$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλους τους φυσικούς n και όλες τις επιλογές φυσικών $1 \leq k_0 < k_1 < \cdots < k_n$. Μια παραλλαγή της $\|\cdot\|_0$ είναι η

$$\|x\|_J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup \left\{ \left((x(k_n) - x(k_0))^2 + \sum_{j=1}^{n} (x(k_j) - x(k_{j-1}))^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Ο χώρος του James (1950) έδωσε απάντηση σε αρκετά ανοικτά προβλήματα.

(α) Ο $(J, \|\cdot\|_J)$ είναι υπόχωρος συνδιάστασης 1 στον J^{**} και είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον J^{**}. Ειδικότερα, δεν είναι αυτοπαθής ενώ έχει διαχωρίσιμο δεύτερο δυϊκό.

(β) Ο J δεν έχει unconditional βάση.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.

2. R. C. James, A non–reflexive Banach space isometric with its second conjugate space.