Το θεώρημα προσέγγισης του Müntz

Σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα. Μια απλή παρατήρηση είναι η εξής: αν η $f(t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, τότε η $g(s) = f(\sqrt[n]{s})$ είναι επίσης συνεχής, άρα η g προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα $p(s)$. Με την αλλαγή μεταβλητής $s = t^n$ συμπεραίνουμε ότι η $f(t)$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από γραμμικούς συνδυασμούς των πολυωνύμων t^{jn}, $j \geq 0$.

Ο Bernstein μελέτησε το ακόλουθο πρόβλημα: αν $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία φυσικών αριθμών με $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$, να βρεθούν συνθήκες που να εξασφαλίζουν ότι η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_j}, \ldots$ με την $\|\cdot\|_\infty$ είναι ολόκληρος ο $C[0,1]$. Η απάντηση δόθηκε από τον Müntz:

Θεώρημα. Έστω $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία φυσικών αριθμών με $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$. Οι συναρτήσεις $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_j}, \ldots$ παράγουν τον $C[0,1]$ αν και μόνο αν

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty.$$

Βιβλιογραφία

1. P. D. Lax, Functional Analysis.

2. A. Pinkus, Density in Approximation Theory.