Η ανισότητα του Grothendieck

Θεώρημα (ανισότητα του Grothendieck) Υπάρχει απόλυτη σταθερά $K_G > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $(a_{jk})_{j,k=1}^{m,n}$ είναι ένας πίνακας πραγματικών αριθμών ώστε

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} s_j t_k\right| \leq \max_j |s_j| \cdot \max_k |t_k|$$

για κάθε $s_j, t_k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \langle u_j, v_k\rangle\right| \leq K_G \max_j \|u_j\| \cdot \max_k \|v_k\|$$

για κάθε χώρο Hilbert H και κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_j, v_k \in H$.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δείτε διάφορες αποδείξεις της ανισότητας. Ένα πρόβλημα που μένει ακόμα ανοικτό είναι ποιά είναι η βέλτιστη τιμή της σταθεράς K_G. Η αρχική απόδειξη του Grothendieck έδινε $K_G \leq \sinh(\pi/2)$. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση είναι του Krivine: $K_G \leq \frac{2}{\sinh^{-1}(1)} < 2$.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.
2. J. Diestel, H. Jarhow and A. Tonge, Absolutely summing operators.
3. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I and II.