Ανισότητες Kahane–Khintchine

Οι συναρτήσεις Rademacher $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ ορίζονται στο $[0,1]$ από τις

$$r_k(t) = \mathrm{sign}\,(\sin\, 2^k \pi t).$$

Αν δούμε τις r_k σαν τυχαίες μεταβλητές στο $[0,1]$, οι βασικές τους ιδιότητες είναι δύο: (α) $\mathbb{P}(r_k = 1) = \mathbb{P}(r_k = -1) = \frac{1}{2}$, (β) οι r_k είναι ανεξάρτητες. Έπεται ότι: αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ τότε

$$\int_0^1 r_{k_1}(t) r_{k_2}(t) \cdots r_{k_n}(t)\, dt = 0.$$

Θεώρημα (ανισότητα Khintchine) Υπάρχουν σταθερές A_p, B_p, $1 \leq p < \infty$, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$,

$$A_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_{L_p[0,1]} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Η ανισότητα δείχνει ότι η ακολουθία $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία ισοδύναμη με την συνήθη βάση του ℓ_2, σε κάθε L_p, $1 \leq p < \infty$.

Θεώρημα (ανισότητα Kahane–Khintchine) Υπάρχουν σταθερές K_p, $1 \leq p < \infty$, ώστε: για κάθε χώρο X με νόρμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_n \in X$,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq K_p \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt.$$

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.

2. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I and II.

3. V. D. Milman and G. Schechtman, Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces.