Το θεώρημα κυρτότητας του M. Riesz

Έστω $T = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας και έστω

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

η διγραμμική μορφή που ορίζεται από αυτόν. Για κάθε $1 \leq p, q \leq \infty$, θέτουμε $\alpha = \frac{1}{p}$ και $\beta = \frac{1}{q}$ (συμφωνούμε ότι $1/\infty = 0$). Ορίζουμε

$$M(\alpha,\beta) = \max\{|T(x,y)| : \|x\|_p \leq 1, \|y\|_{q'} \leq 1\},$$

όπου q' ο συζυγής εκθέτης του q. Παρατηρήστε ότι $M(\alpha,\beta)$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία

$$|T(x,y)| \leq M(\alpha,\beta)\|x\|_p\|y\|_{q'}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Με αυτό το συμβολισμό, το Θεώρημα Κυρτότητας του M. Riesz διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1 (M. Riesz). *Η συνάρτηση $M(\alpha,\beta)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο τρίγωνο $\Delta = \{(\alpha,\beta) : 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1\}$.*

Λέγοντας «λογαριθμικά κυρτή» εννοούμε ότι: αν (α_1,β_1) και (α_2,β_2) είναι δύο σημεία του Δ, και αν $\theta \in (0,1)$, τότε

$$M(\theta\alpha_1 + (1-\theta)\alpha_2, \theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2) \leq [M(\alpha_1,\beta_1)]^{\theta}[M(\alpha_2,\beta_2)]^{1-\theta}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $\log M$ είναι κυρτή στο Δ.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει αν θεωρήσουμε έναν $m \times n$ πίνακα $T = (a_{ij})$ με μιγαδικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$M(\alpha,\beta) = \max\{|T(z,w)| : \|z\|_p \leq 1, \|w\|_{q'} \leq 1\},$$

όπου τα z, w θεωρούνται τώρα στους $\mathbb{C}^m$ και $\mathbb{C}^n$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 2 (G. Thorin). *Η συνάρτηση $M(\alpha,\beta)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο τετράγωνο $Q = \{(\alpha,\beta) : 0 \leq \alpha,\beta \leq 1\}$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 είναι τεχνική αλλά στοιχειώδης. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2 θα χρειαστεί το «Λήμμα των Τριών Ευθειών» του Hadamard (από την Μιγαδική Ανάλυση).

Εφαρμογή. Η ανισότητα Hausdorff–Young: αν $1 \leq p \leq 2$ και $f \in L_p(\mathbb{T})$, τότε $T(f) := (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_{p'}$ και $\|T(f)\|_{p'} \leq \|f\|_p$.

Βιβλιογραφία

1. C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators.
2. G. B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Applications.
3. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities.