Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Έστω T μια απεικόνιση από κάποιον γραμμικό υπόχωρο D του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X, \mathcal{M}, \mu)$ στο χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Η T λέγεται υπογραμμική αν $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ και $|T(af)| = a \cdot |T(f)|$ για κάθε $f, g \in D$ και $a > 0$. Υποθέτουμε ότι η T είναι υπογραμμική.

(α) Λέμε ότι είναι ισχυρά τύπου (p,q), όπου $1 \leq p, q \leq \infty$, αν $L_p(\mu) \subseteq D$, η T απεικονίζει τον $L_p(\mu)$ μέσα στον $L_q(\nu)$, και υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p$ για κάθε $f \in L_p(\mu)$.

(β) Λέμε ότι είναι ασθενώς τύπου (p,q), όπου $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, αν $L_p(\mu) \subseteq D$ και υπάρχει $C > 0$ ώστε $\sup\limits_{t>0} t^q \, \nu(\{|T(f)| > t\}) \leq C\|f\|_p^q$ για κάθε $f \in L_p(\mu)$. Στην περίπτωση $q = \infty$ συμφωνούμε ότι η T είναι ασθενώς τύπου (p, ∞) αν είναι ισχυρά τύπου (p, ∞).

Θεώρημα (Marcinkiewicz). Έστω $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1, \infty]$ ώστε $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$, $q_0 \neq q_1$. Έστω $t \in (0,1)$ και έστω ότι οι p, q ορίζονται από τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Αν T είναι μια υπογραμμική απεικόνιση από τον $L_{p_1}(\mu) + L_{p_2}(\mu)$ στο χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, η οποία είναι ασθενώς τύπου (p_0, q_0) και ασθενώς τύπου (p_1, q_1), τότε η T είναι ισχυρά τύπου (p,q).

Μια κλασική εφαρμογή που θα μπορούσατε να δείτε: η μεγιστική συνάρτηση $H(f)$ μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, ικανοποιεί την $\|H(f)\|_p \leq C\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Βιβλιογραφία

1. C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators.
2. G. B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Applications.