ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006-07)

Ενδεικτικά θέματα για παρουσίαση

1. Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Έστω T μια απεικόνιση από κάποιον γραμμικό υπόχωρο D του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X,\mathcal{M},\mu)$ στο χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(Y,\mathcal{N},\nu)$. Η T λέγεται υπογραμμική αν $|T(f+g)|\leq |T(f)|+|T(g)|$ και $|T(af)|=a\cdot |T(f)|$ για κάθε $f,g\in D$ και $a>0$. Υποθέτουμε ότι η T είναι υπογραμμική.

(α) Λέμε ότι είναι ισχυρά τύπου (p,q), όπου $1\leq p,q\leq\infty$, αν $L_p(\mu)\subseteq D$, η T απεικονίζει τον $L_p(\mu)$ μέσα στον $L_q(\nu)$, και υπάρχει $C>0$ ώστε $\|T(f)\|_q\leq C\|f\|_p$ για κάθε $f\in L_p(\mu)$.

(β) Λέμε ότι είναι ασθενώς τύπου (p,q), όπου $1\leq p\leq\infty$, $1\leq q<\infty$, αν $L_p(\mu)\subseteq D$ και υπάρχει $C>0$ ώστε $\sup\limits_{t>0} t^q\,\nu(\{|T(f)|>t\})\leq C\|f\|_p^q$ για κάθε $f\in L_p(\mu)$. Στην περίπτωση $q=\infty$ συμφωνούμε ότι η T είναι ασθενώς τύπου (p,∞) αν είναι ισχυρά τύπου (p,∞).

Θεώρημα (Marcinkiewicz). Έστω $p_0,q_0,p_1,q_1\in[1,\infty]$ ώστε $p_0\leq q_0$, $p_1\leq q_1$, $q_0\neq q_1$. Έστω $t\in(0,1)$ και έστω ότι οι p,q ορίζονται από τις

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}\quad\text{και}\quad\frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

Αν T είναι μια υπογραμμική απεικόνιση από τον $L_{p_1}(\mu)+L_{p_2}(\mu)$ στο χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(Y,\mathcal{N},\nu)$, η οποία είναι ασθενώς τύπου (p_0,q_0) και ασθενώς τύπου (p_1,q_1), τότε η T είναι ισχυρά τύπου (p,q).

Μια κλασική εφαρμογή που θα μπορούσατε να δείτε: η μεγιστική συνάρτηση $H(f)$ μιας συνάρτησης $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, ικανοποιεί την $\|H(f)\|_p\leq C\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Βιβλιογραφία

1. C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators.

2. G. B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Applications.

2. Το θεώρημα κυρτότητας του Riesz

Έστω $T=(a_{ij})$ ένας $m\times n$ πίνακας και έστω

$$T(x,y)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$$

η διγραμμική μορφή που ορίζεται από αυτόν. Για κάθε $1\leq p,q\leq\infty$, θέτουμε $\alpha=\frac{1}{p}$ και $\beta=\frac{1}{q}$ (συμφωνούμε ότι $1/\infty=0$). Ορίζουμε

$$M(\alpha,\beta)=\max\{|T(x,y)|:\|x\|_p\leq 1,\|y\|_{q'}\leq 1\},$$

όπου q' ο συζυγής εκθέτης του q. Παρατηρήστε ότι $M(\alpha,\beta)$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία

$$|T(x,y)|\leq M(\alpha,\beta)\|x\|_p\|y\|_{q'}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^n$.

Με αυτό το συμβολισμό, το Θεώρημα Κυρτότητας του M. Riesz διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1 (M. Riesz). *Η συνάρτηση $M(\alpha,\beta)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο τρίγωνο $\Delta=\{(\alpha,\beta):0\leq\beta\leq\alpha\leq 1\}$.*

Λέγοντας «λογαριθμικά κυρτή» εννοούμε ότι: αν (α_1,β_1) και (α_2,β_2) είναι δύο σημεία του Δ, και αν $\theta\in(0,1)$, τότε

$$M(\theta\alpha_1+(1-\theta)\alpha_2,\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2)\leq[M(\alpha_1,\beta_1)]^{\theta}[M(\alpha_2,\beta_2)]^{1-\theta}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $\log M$ είναι κυρτή στο Δ.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει αν θεωρήσουμε έναν $m \times n$ πίνακα $T = (a_{ij})$ με μιγαδικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$M(\alpha,\beta) = \max\{|T(z,w)| : \|z\|_p \leq 1, \|w\|_{q'} \leq 1\},$$

όπου τα z, w θεωρούνται τώρα στους $\mathbb{C}^m$ και $\mathbb{C}^n$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 2 (G. Thorin). *Η συνάρτηση $M(\alpha,\beta)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο τετράγωνο $Q = \{(\alpha,\beta) : 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 είναι τεχνική αλλά στοιχειώδης. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2 θα χρειαστεί το «Λήμμα των Τριών Ευθειών» του Hadamard (από την Μιγαδική Ανάλυση).

Εφαρμογή. Η ανισότητα Hausdorff–Young: αν $1 \leq p \leq 2$ και $f \in L_p(\mathbb{T})$, τότε $T(f) := (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_{p'}$ και $\|T(f)\|_{p'} \leq \|f\|_p$.

Βιβλιογραφία

1. C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators.
2. G. B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Applications.
3. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities.

3. Ανισότητες Kahane–Khintchine

Οι συναρτήσεις Rademacher $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ ορίζονται στο $[0,1]$ από τις

$$r_k(t) = \mathrm{sign}\,(\sin 2^k \pi t).$$

Αν δούμε τις r_k σαν τυχαίες μεταβλητές στο $[0,1]$, οι βασικές τους ιδιότητες είναι δύο: (α) $\mathbb{P}(r_k = 1) = \mathbb{P}(r_k = -1) = \frac{1}{2}$, (β) οι r_k είναι ανεξάρτητες. Έπεται ότι: αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ τότε

$$\int_0^1 r_{k_1}(t) r_{k_2}(t) \cdots r_{k_n}(t)\, dt = 0.$$

Θεώρημα (ανισότητα Khintchine) Υπάρχουν σταθερές A_p, B_p, $1 \leq p < \infty$, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$,

$$A_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_{L_p[0,1]} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}.$$

Η ανισότητα δείχνει ότι η ακολουθία $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία ισοδύναμη με την συνήθη βάση του ℓ_2, σε κάθε L_p, $1 \leq p < \infty$.

Θεώρημα (ανισότητα Kahane–Khintchine) Υπάρχουν σταθερές K_p, $1 \leq p < \infty$, ώστε: για κάθε χώρο X με νόρμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_n \in X$,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq K_p \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt.$$

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.
2. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I and II.
3. V. D. Milman and G. Schechtman, Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces.

4. Η ανισότητα του Grothendieck

Θεώρημα (ανισότητα του Grothendieck) Υπάρχει απόλυτη σταθερά $K_G > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $(a_{jk})_{j,k=1}^{m,n}$ είναι ένας πίνακας πραγματικών αριθμών ώστε

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}s_jt_k\right| \leq \max_j |s_j| \cdot \max_k |t_k|$$

για κάθε $s_j, t_k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\langle u_j, v_k\rangle\right| \leq K_G \max_j \|u_j\| \cdot \max_k \|v_k\|$$

για κάθε χώρο Hilbert H και κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_j, v_k \in H$.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δείτε διάφορες αποδείξεις της ανισότητας. Ένα πρόβλημα που μένει ακόμα ανοικτό είναι ποιά είναι η βέλτιστη τιμή της σταθεράς K_G. Η αρχική απόδειξη του Grothendieck έδινε $K_G \leq \sinh(\pi/2)$. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση είναι του Krivine: $K_G \leq \frac{2}{\sinh^{-1}(1)} < 2$.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.

2. J. Diestel, H. Jarhow and A. Tonge, Absolutely summing operators.

3. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I and II.

5. Το θεώρημα προσέγγισης του Müntz

Σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα. Μια απλή παρατήρηση είναι η εξής: αν η $f(t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, τότε η $g(s) = f(\sqrt[n]{s})$ είναι επίσης συνεχής, άρα η g προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα $p(s)$. Με την αλλαγή μεταβλητής $s = t^n$ συμπεραίνουμε ότι η $f(t)$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από γραμμικούς συνδυασμούς των πολυωνύμων t^{jn}, $j \geq 0$.

Ο Bernstein μελέτησε το ακόλουθο πρόβλημα: αν $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία φυσικών αριθμών με $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$, να βρεθούν συνθήκες που να εξασφαλίζουν ότι η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_j}, \ldots$ με την $\|\cdot\|_\infty$ είναι ολόκληρος ο $C[0,1]$. Η απάντηση δόθηκε από τον Müntz:

Θεώρημα. Έστω $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία φυσικών αριθμών με $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$. Οι συναρτήσεις $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_j}, \ldots$ παράγουν τον $C[0,1]$ αν και μόνο αν

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty.$$

Βιβλιογραφία

1. P. D. Lax, Functional Analysis.

2. A. Pinkus, Density in Approximation Theory.

6. Το θεώρημα Bishop–Phelps

Έστω X ένας αυτοπαθής χώρος Banach. Από την ασθενή συμπάγεια της B_X έπεται ότι αν $x^* \in X^*$ τότε υπάρχει $x_0 \in S_X$ ώστε $x^*(x_0) = \|x^*\|$. Ένα θεώρημα του James δείχνει ότι αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τους αυτοπαθείς χώρους. Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν, για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $x_0 \in S_X$ ώστε $x^*(x_0) = \|x^*\|$.

Το θεώρημα Bishop–Phelps (1961) ισχυρίζεται ότι κάθε χώρος Banach (πλησιάζει» στο να έχει αυτή τη χαρακτηριστική ιδιότητα των αυτοπαθών χώρων:

Θεώρημα (Bishop–Phelps). Έστω X χώρος Banach. Το σύνολο D των $x^* \in S_{X^*}$ για τα οποία υπάρχει $x_0 \in S_X$ ώστε $x^*(x_0) = \|x^*\|$ είναι $\|\cdot\|$–πυκνό στην S_{X^*}.

Βιβλιογραφία

1. E. Bishop and R. R. Phelps, A proof that every Banach space is subreflexive.
2. B. Bollobás, Linear Analysis.
3. R. C. James, Characterizations of reflexivity.

7. Το θεώρημα του Choquet

Έστω K ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X και έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο K. Λέμε ότι κάποιο $x \in X$ αναπαρίσταται από το μ αν $\int_K f\,d\mu = f(x)$ για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές f στον X. Η υπόθεση ότι ο X είναι τοπικά κυρτός εξασφαλίζει ότι κάθε μέτρο πιθανότητας μ αναπαριστά το πολύ ένα $x \in X$ (το x είναι το «κέντρο βάρους» του μ).

Με αυτήν την ορολογία, το θεώρημα Krein–Milman μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής: αν K είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X, τότε κάθε $x \in K$ αναπαρίσταται από ένα μέτρο πιθανότητας μ στο K, που έχει φορέα την κλειστή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων του K (δηλαδή, $\mu(K \setminus \overline{\mathrm{ex}(K)}) = 0$).

Θεώρημα (Choquet, μετρικοποιήσιμη περίπτωση). Έστω K ένα μη κενό μετρικοποιήσιμο συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X και έστω $x \in K$. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στο K το οποίο αναπαριστά το x και έχει φορέα το σύνολο των ακραίων σημείων του K (δηλαδή, $\mu(K \setminus \mathrm{ex}(K)) = 0$).

Βιβλιογραφία

1. E. M. Alfsen, Compact convex sets and boundary integrals.
2. J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces.
3. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem.

8. Πλήρως μονότονες συναρτήσεις: το θεώρημα του Bernstein

Μια συνάρτηση $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ λέγεται πλήρως μονότονη αν έχει παραγώγους κάθε τάξης και $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$. Με άλλα λόγια, αν η f είναι μη αρνητική και φθίνουσα, και το ίδιο ισχύει για καθεμία από τις συναρτήσεις $(-1)^n f^{(n)}$. Παραδείγματα πλήρως μονότονων συναρτήσεων είναι οι $x^{-\alpha}$, $e^{-\alpha x}$, όπου $\alpha > 0$.

Θεώρημα (S. Bernstein) Αν $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια πλήρως μονότονη συνάρτηση, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ στο $[0,\infty]$ ώστε: για κάθε $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\,d\mu(t).$$

Το αντίστροφο ισχύει επίσης: κάθε συνάρτηση που αναπαρίσταται κατ' αυτόν τον τρόπο είναι πλήρως μονότονη.

Μια απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος Krein–Milman.

Βιβλιογραφία

1. S. N. Bernstein, Sur les fonctions absolument monotones.

2. D. V. Widder, The Laplace Transform.

3. R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem.

9. Θεωρήματα σταθερού σημείου

Σκοπός αυτού του θέματος είναι: (α) Να δείτε διάφορες αποδείξεις του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer: κάθε συνεχής συνάρτηση $\phi : B_2^n \to B_2^n$ έχει σταθερό σημείο (B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$). (β) Να δείτε διάφορες εφαρμογές του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer στην απόδειξη θεωρημάτων σταθερού σημείου (Schauder, Markov–Kakutani κλπ).

Βιβλιογραφία

1. B. Bollobás, Linear Analysis.

2. J. Dugundji and A. Granas, Fixed Point Theory.

3. D. R. Smart, Fixed Point Theorems.

10. Ο χώρος του James

Θεωρούμε τον χώρο J όλων των μηδενικών ακολουθιών $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ που έχουν φραγμένη τετραγωνική κύμανση. Δηλαδή, $x \in J$ αν $x(n) \to 0$ και υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε επιλογή φυσικών $1 \leq k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n}(x(k_j) - x(k_{j-1}))^2 \leq M^2.$$

Ο χώρος του James είναι ο J εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|x\|_0 = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}(x(k_j) - x(k_{j-1}))^2\right)^{1/2}\right\},$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλους τους φυσικούς n και όλες τις επιλογές φυσικών $1 \leq k_0 < k_1 < \cdots < k_n$. Μια παραλλαγή της $\|\cdot\|_0$ είναι η

$$\|x\|_J = \frac{1}{\sqrt{2}}\sup\left\{\left((x(k_n) - x(k_0))^2 + \sum_{j=1}^{n}(x(k_j) - x(k_{j-1}))^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Ο χώρος του James (1950) έδωσε απάντηση σε αρκετά ανοικτά προβλήματα.

(α) Ο $(J, \|\cdot\|_J)$ είναι υπόχωρος συνδιάστασης 1 στον J^{**} και είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον J^{**}. Ειδικότερα, δεν είναι αυτοπαθής ενώ έχει διαχωρίσιμο δεύτερο δυϊκό.

(β) Ο J δεν έχει unconditional βάση.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.

2. R. C. James, A non–reflexive Banach space isometric with its second conjugate space.

11. Το σύστημα Haar στον L_p, $1 < p < \infty$

Το σύστημα Haar είναι η ακολουθία συναρτήσεων $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $h_1 \equiv 1$ και αν $n = 2^k + s$ όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $s = 1, 2, \ldots, 2^k$, τότε $h_n(t) = \chi_{\left[\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}\right)}(t) - \chi_{\left[\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}\right)}(t)$. Δηλαδή, η h_n έχει φορέα το *δυαδικό διάστημα* $\left[\frac{s-1}{2^k}, \frac{s}{2^k}\right)$ και παίρνει τις τιμές 1 και -1 στο πρώτο και δεύτερο μισό του αντίστοιχα.

Αν $1 \le p < \infty$, κανονικοποιούμε τις h_n στον L_p θεωρώντας τις $h_n/\|h_n\|_p = h_n/|I_n|^{1/p}$, όπου I_n ο φορέας της h_n. Το σύστημα Haar είναι μονότονη βάση στον L_p για κάθε $1 \le p < \infty$.

Θεώρημα. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Θέτουμε $p^* = \max\{p,q\}$. Το σύστημα Haar είναι unconditional βάση στον $L_p[0,1]$ με σταθερά μικρότερη ή ίση από p^*-1. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1,\dots,a_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ ισχύει

$$\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_j h_j\right\|_p \le (p^*-1)\left\|\sum_{j=1}^n a_j h_j\right\|_p .$$

Αυτό αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τον Paley (1932). Ο Burkholder βρήκε την βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.
2. N. L. Carothers, A Short Course on Banach Space Theory.
3. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I and II.

12. Το ℓ_1–θεώρημα του Rosenthal

Αφετηρία του θεωρήματος είναι το εξής πρόβλημα: να δοθούν προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες μια φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αυτό προκύπτει από το θεώρημα Eberlein-Smulian. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία.

Από την άλλη πλευρά, η κανονική βάση του ℓ_1 δεν έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία. Το ℓ_1–θεώρημα του Rosenthal λέει ότι αυτό ακριβώς είναι το ουσιαστικό εμπόδιο.

Θεώρημα (Rosenthal) Έστω $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ φραγμένη ακολουθία σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach X. Τότε, ισχύει ένα από τα εξής:
(α) Η $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία.
(β) Η $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ έχει υπακολουθία που είναι βασική και είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί θεωρία Ramsey.

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.
2. J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces.
3. H. P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ_1.

13. Ο χώρος του Tsirelson

Ο χώρος του Tsirelson απαντά αρνητικά στο ερώτημα αν κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει ισομορφικά κάποιον από τους χώρους ℓ_p, $1 \le p < \infty$ ή τον c_0.

Η νόρμα του Tsirelson ορίζεται στον c_{00}. Για την περιγραφή της χρειαζόμαστε κάποια ορολογία. Αν $(I_1,\dots,I_m)$ είναι μια ακολουθία ξένων διαστημάτων φυσικών αριθμών, λέμε ότι η $(I_1,\dots,I_m)$ είναι αποδεκτή αν $m < \min I_k$ για κάθε $k=1,\dots,m$. Αν I είναι ένα διάστημα φυσικών και αν $x \in c_{00}$ γράφουμε Ix για τον περιορισμό του x στο I (δηλαδή, $(Ix)_n = x_n$ αν $n \in I$ και $(Ix)_n = 0$ αν $n \notin I$). Ορίζουμε $\|\cdot\|_T$ στον c_{00} θέτοντας

$$\|x\|_T = \max\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^m \|I_jx\|_T\right\}$$

όπου το sup παίρνεται πάνω από όλες τις αποδεκτές οικογένειες διαστημάτων. Ο ορισμός της $\|\cdot\|_T$ είναι «πεπλεγμένος», όμως ένα επαγωγικό επιχείρημα δείχνει ότι υπάρχει μια τέτοια νόρμα. Ο χώρος του Tsirelson είναι η πλήρωση T του $(c_{00}, \|\cdot\|_T)$.

Θεώρημα (Tsirelson) Ο χώρος T είναι αυτοπαθής και δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν από τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ούτε τον c_0.

Κατασκευές που έχουν την αρχή τους στην κατασκευή του Tsirelson οδήγησαν στη λύση του προβλήματος της ύπαρξης unconditional βασικής ακολουθίας (από τους Gowers–Maurey) και του προβλήματος της παραμόρφωσης (από τους Odell-Schlumprecht).

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.

2. P. G. Casazza and T. J. Shura, Tsirelson's space.

3. B. S. Tsirelson, It is impossible to embed ℓ_p or c_0 into an arbitrary Banach space.