

# Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα

Αντώνιος Θ. Οικονόμου

3 Οκτωβρίου 2025

## 1 Βασικά στοιχεία μαθήματος

- Τίτλος μαθήματος: Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα.  
Το μάθημα προσφέρεται και για τους φοιτητές του διαπανεπιστημιακού μεταπτυχιακού προγράμματος ΑΛΜΑ με τίτλο «Στοχαστικά Μοντέλα».
- Κωδικός μαθήματος: ΣΕΠ06.
- Ιστότοπος μαθήματος: <https://eclass.uoa.gr/courses/MATH189/>.
- Επίπεδο: Μεταπτυχιακό μάθημα κορμού για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στα Μαθηματικά - κατεύθυνση «Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα» του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ). Μεταπτυχιακό μάθημα επιλογής για το Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό Δίπλωμα Ειδίκευσης «ΑΛΜΑ».
- Προαπαιτούμενες γνώσεις: Είναι απαραίτητο οι φοιτητές να γνωρίζουν καλά τις έννοιες και τις υπολογιστικές τεχνικές από ένα πρώτο πανεπιστημιακό μάθημα πιθανοτήτων, όπως το μάθημα «Πιθανότητες Ι» που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ. Η γνώση των μαθημάτων «Στοχαστικές Ανελίζεις» και «Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα» του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ δεν είναι απαραίτητη, καθώς το αναγκαίο υλικό από αυτά τα μαθήματα θα παρουσιαστεί στην τάξη. Όμως, πιθανή γνώση αυτών των μαθημάτων θα διευκολύνει πολύ την κατανόηση του μαθήματος.
- Διδακτικές ώρες: 4 ώρες την εβδομάδα για 13 εβδομάδες.
- Γλώσσα διδασκαλίας: Ελληνική.
- Ημέρες και ώρες διδασκαλίας: Κάθε Δευτέρα και Τετάρτη, 9:15-11:00.
- Αίθουσα διδασκαλίας: Γ31, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ.

## 2 Διδάσκων

- Αντώνιος Οικονόμου, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. <http://scholar.uoa.gr/aeconom/home>.

### 3 Συνοπτική περιγραφή του μαθήματος

- Στο μάθημα Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα παρουσιάζεται μια σύνοψη των σημαντικότερων εννοιών, αποτελεσμάτων και τεχνικών από τις Στοχαστικές Ανελίξεις (ανανεωτικές διαδικασίες, Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού και συνεχούς χρόνου) με δομές κόστους και τον Δυναμικό Προγραμματισμό (ντετερμινιστικό και στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό, Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων) που χρησιμοποιούνται στη μελέτη προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας στα οποία υπεισέρχεται τυχαιότητα. Επιπλέον παρουσιάζονται συνοπτικά τα θεμελιώδη μοντέλα από τη Θεωρία των Ουρών Αναμονής και τη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων.

### 4 Ύλη

- Ανανεωτικές διαδικασίες με κόστη: Βασική Θεωρία.
- Ανανεωτικές διαδικασίες με κόστη: Εφαρμογές
- Μαρκοβιανές διαδικασίες με κόστη: Θεωρία.
- Μαρκοβιανές διαδικασίες με κόστη: Εφαρμογές.
- Δυναμικός προγραμματισμός και Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.
- Δυναμικός προγραμματισμός και Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε άπειρο χρονικό ορίζοντα.
- Βασικές έννοιες ουρών αναμονής.
- Αποτίμηση απόδοσης ουρών αναμονής.
- Έλεγχος ουρών αναμονής.
- Βασικά μοντέλα θεωρίας αποθεμάτων.
- Έλεγχος αποθεμάτων πολλών περιόδων υπό αβεβαιότητα.

### 5 Προτεινόμενα συγγράμματα

- Κύριο σύγγραμμα:
  - \* Μπουρνέτα, Αποστόλου και Οικονόμου, Αντωνίου (2024) *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Κάλλιπος Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. ISBN 9786182282076. Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 132055694.
- Επιπλέον συγγράμματα:
  - \* Φακίνου, Δημητρίου (2024) *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Εκδόσεις Α. Παπαζήσης ISBN: 9789600243789. Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133034619.
  - \* Kulkarni, Vidyadhar (2017) *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. ήαμμαν & Ηαλλ. ISBN: 9780367736798.

## 6 Σχέδιο μαθήματος

- **Εβδομάδα 01** Εισαγωγή στην ανανεωτική θεωρία: βασικές έννοιες, υπολογισμός ανανεωτικών συναρτήσεων, διατύπωση και λύση ανανεωτικών εξισώσεων.
- **Εβδομάδα 02** Οριακά θεωρήματα στην ανανεωτική θεωρία και εφαρμογές. Εισαγωγή στη διαδικασία Poisson.
- **Εβδομάδα 03** Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους, αναγεννητικές διαδικασίες και αναγεννητικές διαδικασίες με κόστη. Εφαρμογές ανανεωτικών και αναγεννητικών διαδικασιών: αντικατάσταση μηχανήματος, εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία, εκκαθάριση αποθήκης.
- **Εβδομάδα 04** Εφαρμογές ανανεωτικών και αναγεννητικών διαδικασιών: παρελθών, υπολειπόμενος και  $t$ -εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης. Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου.
- **Εβδομάδα 05** Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου. Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με κόστη. Εφαρμογές Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου με κόστη: συντήρηση-αντικατάσταση μηχανήματος. Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου.
- **Εβδομάδα 06** Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου. Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου με κόστη. Εφαρμογές Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου με κόστη: αποδοχή πελατών σε σύστημα εξυπηρέτησης
- **Εβδομάδα 07** Εισαγωγή στον δυναμικό προγραμματισμό σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα: βασικές υποθέσεις, έννοιες ιστορίας και πολιτικής, κριτήριο βελτιστοποίησης. Θεωρία δυναμικού προγραμματισμού σε πεπερασμένο ορίζοντα: αξία πολιτικής και συνάρτηση βέλτιστης τιμής, ύπαρξη και χαρακτηρισμός βέλτιστης πολιτικής. Γενική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού σε πεπερασμένο ορίζοντα.
- **Εβδομάδα 08** Εφαρμογές δυναμικού προγραμματισμού σε πεπερασμένο ορίζοντα: το πρόβλημα κατανομής πόρων, ένα μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής, ένα μοντέλο συντήρησης - αντικατάστασης. Το επιχείρημα της ανταλλαγής για την επίλυση μιας κλάσης προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού με πεπερασμένο ορίζοντα. Εφαρμογές του επιχειρήματος της ανταλλαγής: ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών, μεγιστοποίηση απόδοσης μηχανήματος μέχρι την εμφάνιση βλάβης. Προβλήματα βέλτιστης διακοπής. Εφαρμογές προβλημάτων βέλτιστης διακοπής: το πρόβλημα της πώλησης περιουσιακού στοιχείου,
- **Εβδομάδα 09** Εφαρμογές προβλημάτων βέλτιστης διακοπής (συνέχεια): εξάσκηση δικαιώματος αγοράς-μετοχής, το πρόβλημα του γραμματέως. Πλαίσιο Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων σε άπειρο χρονικό ορίζοντα.
- **Εβδομάδα 10** Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού (Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων) για το κριτήριο μεγιστοποίησης - ελαχιστοποίησης του συνολικού μέσου αποπληθωρισμένου κόστους. Εφαρμογές Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων σε άπειρο χρονικό ορίζοντα.
- **Εβδομάδα 11** Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών Αναμονής: βασικά χαρακτηριστικά, ονοματολογία Kendall, βασικές περιοχές μελέτης, βασικές στοχαστικές διαδικασίες αποτίμησης απόδοσης ουρών. Εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων πελατών. Βασικά απολέσματα: χαρακτηρισμός ευστάθειας στην  $G/G/c$  ουρά, ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων, ιδιότητα PASTA και νόμος του Little. Ανάλυση Μέσης Τιμής.

- **Εβδομάδα 12** Απλές Μαρκοβιανές ουρές: πλαίσιο, κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών, ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων, εμφυτευμένες κατανομές, κατανομή χρόνου παραμονής πελάτη και μέτρα για τον κύκλο απασχόλησης. Κλασικά μοντέλα: η  $M/M/1$  ουρά, η  $M/M/c$  ουρά, η  $M/M/c/c$  ουρά, η  $M/M/c$  ουρά με ανυπόμονους ή αποθαρρυνόμενους πελάτες. Σύγκριση  $M/M/c$  και αντίστοιχων  $M/M/1$  συστημάτων.
- **Εβδομάδα 13** Εισαγωγή στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων: η έννοια του αποθέματος, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αποθεμάτων, κατηγορίες προβλημάτων διαχείρισης αποθεμάτων. Το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας και επεκτάσεις του. Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: πλαίσιο, πολιτικές  $(Q, R)$  και πολιτικές  $(s, S)$ . Το μοντέλο  $(Q, R)$  συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson. Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη. Μοντέλα πολλών περιόδων.

## 7 Μελέτη - βαθμολογία

- Για να αφομοιωθεί η ύλη του μαθήματος είναι σημαντικό κάθε φοιτητής να κάνει τα ακόλουθα:
  - να παρακολουθεί τις διαλέξεις,
  - να διαβάζει το κύριο σύγγραμμα,
  - να λύνει πολλές ασκήσεις από το κύριο σύγγραμμα,
  - να σκέφτεται επεκτάσεις, παραλλαγές και εφαρμογές των αποτελεσμάτων και των μεθόδων που θα διδάσκειται.

Για να ενθαρρυνθεί ο φοιτητής για όλα τα παραπάνω θα ανατίθενται ασκήσεις, οι οποίες και θα πρέπει να παραδίδονται χειρόγραφα.

Για να περάσει επιτυχώς ένας φοιτητής το μάθημα θα πρέπει ο βαθμός του στην τελική εξέταση να είναι μεγαλύτερος ή ίσως του 5. Στην περίπτωση αυτή ο τελικός βαθμός του θα διαμορφωθεί ως εξής:

- Τελική εξέταση (80%),
- Ασκήσεις (10%),
- Παρουσίες στις διαλέξεις - συμμετοχή (10%).