

Βασικά μοντέλα με στοχαστική ζήτηση

Βασικά μοντέλα με στοχαστική ζήτηση

- Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος.
- Το μοντέλο περιοδικής παρακολούθησης μιας περιόδου (μοντέλο εφημεριδοπώλη).
- Το μοντέλο περιοδικής παρακολούθησης πολλών περιόδων.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Πλαίσιο

- Η ζήτηση είναι μια στοχαστική διαδικασία $\{D(t), t \geq 0\}$.
 $D(t)$: συνολική ζήτηση στο διάστημα $[0, t]$.
- L : Χρόνος καθυστέρησης παράδοσης, γνωστός και σταθερός.
- Η παρακολούθηση του αποθέματος μπορεί να είναι συνεχής ή περιοδική.
- Όταν η ζήτηση είναι στοχαστική, πρέπει εκτός από το απόθεμα, να καταγράφονται οι παραγγελίες που είναι σε εξέλιξη και οι τυχόν εκκρεμότητες.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Μεταβλητές

- $I(t)$: ποσότητα προϊόντος στην αποθήκη (stock-on-hand) τη χρονική στιγμή t .
- $B(t)$: ποσότητα προϊόντος σε εκκρεμότητα προς τους πελάτες (backlog) τη χρονική στιγμή t .
- $IO(t)$: ποσότητα προϊόντος που βρίσκεται καθ' οδόν προς την αποθήκη από προηγούμενες παραγγελίες (incoming orders) τη χρονική στιγμή t .
- $IL(t) = I(t) - B(t)$: επίπεδο αποθέματος (inventory level) τη χρονική στιγμή t .
- $IP(t) = I(t) - B(t) + IO(t) = IL(t) + IO(t)$: θέση αποθέματος (inventory position) τη χρονική στιγμή t .

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Μεταβλητές

- Οι ποσότητες $I(t)$, $B(t)$, $IO(t)$ είναι μη αρνητικές.
- Οι $IL(t)$ και $IP(t)$ μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές.
- Κατά κανόνα δεν υπάρχουν ταυτόχρονα προϊόν στην αποθήκη και εκκρεμότητες προς τους πελάτες:
 $I(t)B(t) = 0$ για $t \geq 0$.

Τότε:

$$I(t) = \max(IL(t), 0) \text{ και}$$

$$B(t) = -\min(IL(t), 0).$$

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Η μεταβλητή της θέσης αποθέματος

- Η μεταβλητή της θέσης αποθέματος, $IP(t)$ είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού δίνει πληροφορία και για το απόθεμα στην αποθήκη, και για τις εκκρεμότητες και για τις παραγγελίες σε εξέλιξη.
- Οι περισσότερες πολιτικές βασίζονται σε αυτήν για το πότε πρέπει να γίνονται παραγγελίες.
- Όταν $L = 0$, τότε $IO(t) = 0$ και $IP(t) = IL(t)$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος: Παράμετροι

- Μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων με συνεχή παρακολούθηση, στο οποίο εφαρμόζεται πολιτική (Q, R) .
 - K : Σταθερό κόστος ανά παραγγελία.
 - c : Κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος.
 - h : Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα.
 - p : Κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα.
 - L : Χρόνος καθυστέρησης παράδοσης παραγγελίας.
 - Η ζήτηση ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με σταθερή ~~μίσθ~~ ^{μίσθ} a ανά χρονική μονάδα.
 - Το μοντέλο είναι στοχαστικό ανάλογο του EOQ μοντέλου.
- όταν η $\bar{x}$ ~~είναι~~ ^{είναι} ~~αποθέματος~~ ^{αποθέματος} ~~δίνεται~~ ^{δίνεται} R παραγγέλλεται Q

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Περιγραφή

- Υποθέτουμε το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με τις επιπλέον υποθέσεις:
 - Η ζήτηση φθάνει σε διακριτές μονάδες σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων Poisson $\{D(t) : t \geq 0\}$, με ρυθμό a .
 - Κάθε άφιξη αντιστοιχεί ζήτηση μιας μονάδας προϊόντος.
 - $D(t, u] = D(u) - D(t)$: Η ζήτηση στο διάστημα $(t, u]$.
 - Η $D(t, u]$ είναι τ.μ. Poisson με μέση τιμή $a(u - t)$.
 - Η πολιτική είναι τύπου (Q, R) , όπου οι Q, R είναι ακέραιοι.
- Στόχος: Εύρεση ακέραιων τιμών των Q, R , ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος παραγγελίας, αποθήκευσης και ελλείψεων ανά χρονική μονάδα, σε άπειρο ορίζοντα, $C(Q, R)$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση

- Το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα $C(Q, R)$ αναλύεται σε
 - Μέσο πάγιο κόστος: $\frac{Ka}{Q}$ (αφού η παραγγελία έχει μέγεθος Q , το επιμερισμένο πάγιο κόστος ανά μονάδα προϊόντος θα είναι $\frac{K}{Q}$ και πρέπει να παραγγέλονται a μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα για να καλύπτεται η ζήτηση).
 - Κόστος αγοράς/παραγωγής: ca .
 - Κόστος αποθήκευσης, ελλείψεων:

$$h \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{t=0}^T I(t) dt}{T} = hE[I], \quad p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{t=0}^T B(t) dt}{T} = pE[B]$$

όπου I, B τυχαίες μεταβλητές με τις στάσιμες κατανομές του αποθέματος, των ελλείψεων.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση

- Συνάρτηση κόστους:

$$C(Q, R) = \frac{Ka}{Q} + ca + hE[I] + pE[B].$$

- Το σύνολο στο οποίο θα γίνει η βελτιστοποίηση του $C(Q, R)$ θα είναι το

$$\{(Q, R) : Q \geq 1, R \geq -Q\}.$$

Το $Q \leq 1$ γιατί προφανώς δεν έχει νόημα η παραγγελία να είναι μηδενική.

Το επίπεδο αναπαραγγελίας R μπορεί να είναι αρνητικό, αλλά το επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας θα πρέπει να είναι μη-αρνητικό, αλλιώς θα παραμένει πάντα αρνητικό. Άρα $R + Q \geq 0$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R)$$

με

$$C(Q, R) = \frac{Ka}{Q} + ca + hE[I] + pE[B].$$

- Για τον υπολογισμό των $E[I]$ και $E[B]$ θα δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{IP(t), t \geq 0\}$ της θέσης αποθέματος είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, με στάσιμη κατανομή απλής μορφής.
- Μέσω αυτής θα υπολογιστούν οι στάσιμες κατανομές των διαδικασιών $\{I(t)\}$ και $\{B(t)\}$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $IP(t)$

- Για τη στοχαστική διαδικασία $\{IP(t), t \geq 0\}$, ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο όλων των ακεραίων (ανάλογα με τα αρχικά αποθέματα, εκκρεμότητες και εισερχόμενες παραγγελίες).
- Η θέση αποθέματος μειώνεται κατά μια μονάδα σε κάθε χρονική μονάδα άφιξης ζήτησης t , εκτός κι αν $IP(t^-) = R + 1$, οπότε γίνεται αναπαραγγελία.
- Παρόλο που η ποσότητα Q θα έρθει στην αποθήκη τη χρονική στιγμή $t + L$, κατά τη χρονική στιγμή t προστίθεται στις εισερχόμενες ποσότητες $IO(t)$ και στη θέση αποθέματος $IP(t)$, επομένως η θέση αποθέματος παίρνει αμέσως την τιμή $R + Q$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $IP(t)$

- Επομένως, η θέση αποθέματος $\{IP(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ.
 - με χώρο καταστάσεων $\mathbb{Z}$,
 - μια επαναληπτική κλάση $\{R+1, R+2, \dots, R+Q\}$, και
 - ρυθμούς

$$q_{ij} = \begin{cases} a, & i = R+2, \dots, R+Q, j = i-1 \\ a, & i = R+1, j = R+Q \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Η κατανομή ισορροπίας της είναι διακριτή ομοιόμορφη:

$$p_i = \frac{1}{Q}, i = R+1, \dots, R+Q.$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $IL(t)$

- Για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους χρειαζόμαστε τις κατανομές ισορροπίας των $\{I(t)\}$ (απόθεμα) και $\{B(t)\}$ (εκκρεμότητες).
- Αυτές προκύπτουν από την κατανομή ισορροπίας της $\{IP(t)\}$, (p_i) .
- Σύγκριση σε στιγμές t και $t + L$:

$$IL(t+L) = IL(t) + IO(t) - D(t, t+L] = IP(t) - D(t, t+L].$$

- Επομένως, για τις αντίστοιχες κατανομες ισορροπίας, ισχύει:

$$IL = IP - D,$$

με $IP \sim \text{Uniform}(\{R + 1, \dots, R + Q\})$,
και $D \sim \text{Poisson}(aL)$, ανεξάρτητη της IP .

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- Υπολογισμός $E[B]$:

$$\begin{aligned} B(t+L) &= \max(-IL(t+L), 0) \\ &= \max(D(t, t+L] - IP(t), 0) \\ \Rightarrow E[B] &= E[\max(D - IP), 0]. \end{aligned}$$

- Δεσμεύοντας στην τιμή της IP :

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \underbrace{E[\max(D - s, 0)]}_{G(s)} = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} G(s),$$

με $G(s)$ τη συνάρτηση απώλειας πρώτης τάξης της D
(μέση υπέρβαση της D πάνω από το επίπεδο s).

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- $G(s)$ είναι το μέσο επίπεδο εκκρεμοτήτων (backlog), όταν η θέση αποθέματος παραμένει σταθερή ($IP = s$).
- Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με μια πολιτική $(Q, R) = (1, s - 1)$, δηλαδή να παραγγέλλνεται μια μονάδα κάθε φορά που έρχεται μια μονάδα ζήτησης (πολιτική αποθέματος βάσης s).

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- Γενικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= E[\max(D - s, 0)] = \sum_{k=0}^{\infty} P[\max(D - s, 0) > k] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P[D - s > k] = \sum_{k=0}^{\infty} P[D > s + k] \\
 &= \sum_{j=s}^{\infty} P[D > j] = E[D] - \sum_{j=0}^{s-1} P(D > j) \\
 &= aL - \sum_{j=0}^{s-1} (1 - F(j)) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j),
 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } F(j) = P[D \leq j] = \sum_{k=0}^j e^{-aL} \frac{(aL)^k}{k!}.$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- Άρα για μια πολιτική αποθέματος βάσης s (ισοδύναμα πολιτική $(Q, R) = (1, s - 1)$), η μέση τιμή των εκκρεμοτήτων είναι:

$$\bar{B}(s) = G(s) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

- Γενικότερα για μια γενική πολιτική (Q, R) , η μέση τιμή των εκκρεμοτήτων είναι:

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{B}(s).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[I]$

- Υπολογισμός $E[I]$:

$$\begin{aligned} I(t+L) &= \max(IL(t+L), 0) \\ &= \max(IP(t) - D(t, t+L], 0) \\ \Rightarrow E[I] &= E[\max(IP - D), 0]. \end{aligned}$$

- Δεσμεύοντας στην τιμή της IP :

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} E[\max(s - D, 0)] = \frac{1}{Q} \bar{I}(s),$$

$$\text{με } \bar{I}(s) = E[\max(s - D, 0)].$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[I]$

- Από τη σχέση $IL(t) = I(t) - B(t)$, έχουμε

$$\bar{I}(s) = E[IL] + \bar{B}(s). *$$

- Επίσης, έχουμε $IL = IP - D \Rightarrow E[IL] = E[IP] - E[D]$.
- Όμοια με την $G(s)$ παίρνουμε

$$\bar{I}(s) = E[\max(s - D, 0)] = s - aL + \bar{B}(s) = \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

* Διότι $\bar{I}(s) = E[\max(s - D, 0)] = E[s - D + \max(0, D - s)]$
 $= s - E[D] + E[\max(0, D - s)] = s - E[D] + \bar{B}(s).$
 υπό την προϋπόθεση (1, s-1).
 ↑
 δέση αποθεμάτων

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[I]$

- Άρα για μια πολιτική αποθέματος βάσης s (ισοδύναμα πολιτική $(Q, R) = (1, s - 1)$), η μέση τιμή του αποθέματος είναι:

$$\bar{I}(s) = \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

- Γενικότερα για μια γενική πολιτική (Q, R) , η μέση τιμή του αποθέματος είναι:

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{I}(s).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση μέσου κόστους:

$$C(Q, R) = ca + \frac{1}{Q} \left(Ka + \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s) \right),$$

όπου

$$C(s) = h \underbrace{\bar{I}(s)}_{\sum_{j=0}^{s-1} F(j)} + p \underbrace{\bar{B}(s)}_{aL - s - \sum_{j=0}^{s-1} F(j)} = p(aL - s) + (h + p) \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

- Η ποσότητα $C(s)$ είναι το μέσο κόστος αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα, κάτω από την πολιτική αποθέματος βάσης s .

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $C(Q, R)$ μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων:

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R) = \inf_{Q \geq 1} C^*(Q)$$

όπου

$$C^*(Q) = \inf_{R \geq -Q} C(Q, R) = ca + \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{Q} \inf_{R \geq -Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s).$$

- Για το δεύτερο στάδιο, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί ως προς R το

$$\sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Η συνάρτηση $C(s)$ με

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h + p) \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

είναι κυρτή, αφού

$$C(s+1) - C(s) = -p + (h+p)F(s),$$

που είναι αύξουσα ως προς s .

- Άρα η $C(s)$ ελαχιστοποιείται για $s = s^*$, όπου

$$s^* = \min \left\{ s : F(s) \geq \frac{p}{h+p} \right\}. \quad (1)$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Για οποιοδήποτε Q , το $\sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)$ έχει ελάχιστη τιμή ως προς R .
- Οι όροι του ελάχιστου αθροίσματος είναι οι Q κατά σειρά μικρότερες τιμές της $C(s)$, έστω $C_{(1)}, C_{(2)}, \dots, C_{(Q)}$, οι οποίες προκύπτουν όταν το s μεταβάλλεται σε ένα διάστημα $\{R^*(Q) + 1, \dots, R^*(Q) + Q\}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
 C^*(Q) &= ca + \frac{1}{Q} \left(Ka + \sum_{j=1}^Q C_{(j)} \right) \\
 &= ca + \frac{1}{Q} \left(Ka + \sum_{s=R^*(Q)+1}^{R^*(Q)+Q} C(s) \right).
 \end{aligned}$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Το $R^*(Q)$ είναι το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας για ποσότητα παραγγελίας Q .

- Αναδρομικό σχήμα για $R^*(Q)$, $Q = 1, 2, \dots$:

① Για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* - 1$.

- ② Έστω $R^*(Q)$ η βέλτιστη τιμή του R για Q . Τότε οι $C(R^*(Q) + 1), \dots, C(R^*(Q) + Q)$ είναι οι Q ελάχιστες τιμές της $C(s)$, $s \in \mathbb{Z}$. Για $Q + 1$, λόγω της κυρτότητας της $C(s)$, η επόμενη αμέσως μεγαλύτερη τιμή της $C(s)$ θα είναι μια από τις $C(R^*(Q))$ και $C(R^*(Q) + Q + 1)$. Στην πρώτη περίπτωση το επίπεδο αναπαραγγελίας θα μειωθεί κατά μια μονάδα, ενώ στη δεύτερη θα παραμείνει το ίδιο όπως πριν:

$$R^*(Q+1) = \begin{cases} R^*(Q) - 1, & \text{αν } C(R^*(Q)) \leq C(R^*(Q) + Q + 1) \\ R^*(Q), & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Το επίπεδο αναπαραγγελίας είναι φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q , αφού $R^*(Q+1) \leq R^*(Q)$.
- Επίσης, για κάθε αύξηση του Q κατά μια μονάδα το $R^*(Q)$ μειώνεται κατά μια μονάδα ή παραμένει το ίδιο, ενώ για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* > -1$.
- Επομένως $R^*(Q) \geq -Q$ για κάθε τιμή του Q .

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Για το πρώτο στάδιο βελτιστοποίησης,

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R) = \inf_{Q \geq 1} C^*(Q),$$

βλέπουμε ότι

$$C^*(Q+1) - C^*(Q) = \frac{w(Q) - Ka}{Q(Q+1)},$$

όπου

$$w(Q) = QC_{(Q+1)} - \sum_{j=1}^Q C_{(j)} = \sum_{j=1}^Q (C_{(Q+1)} - C_{(j)}).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Έχουμε: $w(Q+1) - w(Q) = (Q+1)(C_{(Q+2)} - C_{(Q+1)})$.
- $C_{(j)} \uparrow j \Rightarrow w(Q) \uparrow Q$.
- Επομένως, αν $C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0$ για κάποιο Q , τότε $C^*(Q'+1) - C^*(Q') > 0$ για κάθε $Q' \geq Q$.
- Συνεπώς, η βέλτιστη τιμή του Q είναι η μικρότερη τιμή για την οποία η διαφορά γίνεται θετική:

$$\begin{aligned} Q^* &= \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} \\ &= \inf\{Q \geq 1 : w(Q) > Ka\}. \end{aligned}$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων.
- Προϊόν με ζήτηση Poisson με ρυθμό $a = 3$ μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου.
- Χρόνος καθυστέρησης παραγγελίας $L = 2$.
- Σταθερό κόστος παραγγελίας $K = 2$.
- Κόστη αποθήκευσης και ελλείψεων $h = 1$ και $p = 2$, αντίστοιχα, ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου.
- Να υπολογιστεί η βέλτιστη πολιτική τύπου (Q, R) .

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Υπολογίζουμε πρώτα τη βέλτιστη πολιτική αποθέματος βάσης s^* :

$$s^* = \min \left\{ s : F(s) \geq \frac{p}{h+p} \right\} = \min \left\{ s : F(s) \geq \frac{2}{3} \right\},$$

όπου $F(s)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Ποισσον με παράμετρο $aL = 6$.

- Υπολογίζοντας τις τιμές της $F(s)$ παίρνουμε $F(6) = 0.606$ και $F(7) = 0.744$. Επομένως $s^* = 7$.
- Επομένως, για παραγγελία $Q = 1$ μονάδας προϊόντος το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας είναι το $R^*(1) = 6$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Υπολογίζουμε τώρα την $C(s)$, χρησιμοποιώντας την

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h + p) \sum_{j=0}^{s-1} F(j)$$

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C(s)$	8.06	6.25	4.70	3.55	2.89	2.71	2.94	3.48	4.23

- Από τον πίνακα έχουμε τις 9 ελάχιστες τιμές της $C(s)$:
 $C_{(1)} = C(7) = 2.71, C_{(2)} = C(6) = 2.89, C_{(3)} = C(8) = 2.94, \dots, C_{(9)} = C(1) = 8.06.$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας υπολογίζεται από την

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\},$$

αφού πρώτα υπολογιστούν οι τιμές της $C^*(Q)$ από την

$$C^*(Q) = ca + \frac{1}{Q} \left(Ka + \sum_{j=1}^Q C_{(j)} \right),$$

για διαδοχικές τιμές του Q μέχρι την πρώτη τιμή που ικανοποιεί τη συνθήκη τερματισμού.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

Q	1	2	3	4	5	6	7
$C^*(Q)$	8.71	5.80	4.85	4.51	4.32	4.30	4.36

- Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} = 6.$$

- Το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας $R^*(Q^*) = R^*(6)$ βρίσκεται από το αναδρομικό σχήμα.
- Ισοδύναμα, από τον πίνακα των $C(s)$ έχουμε ότι οι 6 ελάχιστες τιμές της $C(s)$, αντιστοιχούν στις $C(5), \dots, C(10)$. Δηλαδή: $R^*(6) + 1 = 5$ και $R^*(6) = 4$.
- Η βέλτιστη (Q, R) πολιτική είναι $(Q^*, R^*) = (6, 4)$: Όταν η θέση αποθέματος φτάνει τη στάθμη 4 να γίνεται παραγγελία 6 μονάδων προϊόντος.