

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Περιγραφή

- Συσσωρευμένο κεφάλαιο $\rightarrow$ Ετήσιο εισόδημα.
- Αν το ετήσιο εισόδημα είναι x , τότε πρέπει να αποφασιστεί η ποσότητα προς κατανάλωση a , $0 \leq a \leq x$.
- Αν καταναλωθεί a , τότε το επόμενο έτος το εισόδημα θα είναι $x + \theta(x - a)$,
(ενσωμάτωση αδιάθετου εισοδήματος στο κεφάλαιο με επιτόκιο θ).
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση συνολικού ποσού κατανάλωσης για τα επόμενα N χρόνια, δοθέντος ότι το φετινό ετήσιο εισόδημα είναι x .

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: ο αριθμό N των ετών προγραμματισμού.
- Στάδιο: ο αριθμός n των υπόλοιπων ετών.
- Κατάσταση: Το ετήσιο εισόδημα x στην αρχή ενός έτους.
- Απόφαση: Το ποσό a που θα καταναλωθεί.
- Δυναμική: $x \xrightarrow{a} x + \theta(x - a)$.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$ η μέγιστη ωφέλεια (συνολική κατανάλωση), ξεκινώντας από την κατάσταση x , όταν απομένουν n έτη.

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής υπολογίζεται αναδρομικά από την

$$\begin{aligned}v_0(x) &= 0, \quad x \geq 0, \\v_n(x) &= \max_{a \in [0, x]} [a + v_{n-1}(x + \theta(x - a))], \\&\quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη

$$v_0(x) = 0, \quad x \geq 0,$$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 1$, έχουμε

$$v_1(x) = \max_{a \in [0, x]} [a + 0] = x, \quad x \geq 0.$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για $n = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \max_{a \in [0, x]} [a + x + \theta(x - a)] \\ &= (1 + \theta)x + \max_{a \in [0, x]} [(1 - \theta)a]. \end{aligned}$$

- $(1 - \theta)a$ γραμμική με μέγιστο στο 0 ή στο x :

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \begin{cases} (1 + \theta)x + (1 - \theta)0 & \text{αν } \theta \geq 1, \\ (1 + \theta)x + (1 - \theta)x & \text{αν } \theta \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 + \theta)x & \text{αν } \theta \geq 1, \\ 2x & \text{αν } \theta \leq 1, \end{cases} \\ &= \underbrace{\max[1 + \theta, 2]}_{\rho_2} x = \rho_2 x, x \geq 0. \end{aligned}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Εικασία για συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Εικάζουμε ότι $v_n(x) = \rho_n x$, $x \geq 0$.
- Απόδειξη με επαγωγή στο n .
- Για $n = 0$ ισχύει προφανώς με $\rho_0 = 0$.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε από την εξίσωση βελτιστοποίησης έχουμε

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \max_{a \in [0, x]} [a + \rho_{n-1}(x + \theta(x - a))] \\ &= (1 + \theta)\rho_{n-1}x + \max_{a \in [0, x]} [(1 - \theta\rho_{n-1})a], \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

- $(1 - \theta\rho_{n-1})a$ γραμμική συνάρτηση του $a \rightarrow$ μέγιστη τιμή στο $[0, x]$ λαμβάνεται στο 0 ή στο x .

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Εικασία για συνάρτηση βέλτιστης τιμής (συνέχεια)

- Επομένως:

$$\begin{aligned}v_n(x) &= (1 + \theta)\rho_{n-1}x + \max_{a \in \{0, x\}} [(1 - \theta\rho_{n-1})a] \\&= \underbrace{\max[(1 + \theta)\rho_{n-1}, 1 + \rho_{n-1}]}_{\rho_n} x \\&= \rho_n x, \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

- Η εικασία αποδείχθηκε και, επιπλέον, βρέθηκε ένας αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό των σταθερών ρ_n .

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης δίνεται από τον τύπο

$$v_n(x) = \rho_n x, \quad x \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου

$$\rho_0 = 0,$$

$$\rho_n = \max[(1 + \theta)\rho_{n-1}, 1 + \rho_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική

- Έχουμε δει ότι

$$v_n(x) = (1 + \theta)\rho_{n-1}x + \max_{a \in \{0, x\}} [(1 - \theta\rho_{n-1})a], \quad x \geq 0.$$

- Στο στάδιο n , η βέλτιστη πολιτική είναι $a_n^*(x) = 0$ (αποταμίευση όλου του ποσού), αν

$$1 - \theta\rho_{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow \rho_{n-1} \geq \frac{1}{\theta}.$$

- Άρα:

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \rho_{n-1} \geq \frac{1}{\theta}, \\ x & \text{αν } \rho_{n-1} \leq \frac{1}{\theta}. \end{cases}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική (συνέχεια)

- Από αναδρομικό τύπο $\rho_n = \max[(1 + \theta)\rho_{n-1}, 1 + \rho_{n-1}]$, έχουμε ρ_n αύξουσα.
- Έστω n^* ο ελάχιστος n για τον οποίο $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$.
- Τότε, έχουμε $\rho_n < \frac{1}{\theta}$ για $n \leq n^* - 1$, ενώ $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$ για $n \geq n^*$.
- Επίσης,

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \geq n^* + 1, \\ x & \text{αν } n \leq n^*. \end{cases}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική (συνέχεια)

- Υπολογισμός των ρ_n :

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 0, \\ \rho_n &= \rho_{n-1} + \max(1, \theta \rho_{n-1}) \\ &= \begin{cases} \rho_{n-1} + 1 & n \leq n^*, \\ \rho_{n-1}(1 + \theta) & n \geq n^* + 1. \end{cases}\end{aligned}$$

- Άρα

$$\rho_n = \begin{cases} n & n \leq n^*, \\ n^*(1 + \theta)^{n-n^*} & n \geq n^* + 1. \end{cases}$$

- Άρα ο n^* , ο ελάχιστος n με $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$, είναι ο

$$n^* = \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil.$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική (τελική μορφή)

- Έστω

$$n^* = \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil.$$

- Η βέλτιστη πολιτική κατανάλωσης είναι

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \geq n^* + 1, \\ x & \text{αν } n \leq n^*, \end{cases}$$

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι

$$v_n(x) = \rho_n x, \quad x \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου

$$\rho_n = \begin{cases} n & \text{αν } n \leq n^*, \\ n^*(1 + \theta)^{n-n^*} & \text{αν } n \geq n^*. \end{cases}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Περιγραφή

- Επενδυτής με κεφάλαιο y χρηματικών μονάδων (1 πόρος).
- Κατανομή σε N δραστηριότητες.
- Επένδυση x χρημ. μον. στην επιλογή $n \rightarrow$ αναμενόμενη απόδοση $r_n(x)$.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης συνολικής απόδοσης.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: το πλήθος N των δραστηριοτήτων.
- Στάδιο: το πλήθος n των υπόλοιπων δραστηριοτήτων για την επένδυση του εναπομείναντος κεφαλαίου.
- Κατάσταση: το εναπομείναν κεφάλαιο x για επένδυση στις υπόλοιπες δραστηριότητες.
- Αρχική κατάσταση: y .
- Απόφαση: Το ποσό a που θα επενδυθεί στη δραστηριότητα n .
- Δυναμική: $x \xrightarrow{a} x - a$.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$ η μέγιστη συνολική απόδοση, ξεκινώντας από εναπομείναν κεφάλαιο x για επένδυση στις υπόλοιπες n δραστηριότητες.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Μοντελοποίηση

- Πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού (π.μ-γ.π):

$$\begin{aligned} \max_{\text{υπό}} \quad & \sum_{n=1}^N r_n(a_n) \\ & \sum_{n=1}^N a_n \leq y \\ & a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

- Πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού, εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y, \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0, x]} [r_n(a) + v_{n-1}(x - a)], \\ & \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Συμμετρική περίπτωση, αύξουσα κυρτή απόδοση

- Ειδική περίπτωση:

$$r_n(a) = r(a), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$r(a) \geq 0, \text{ αύξουσα κυρτή, } r(0) = 0.$$

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$v_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq y$$

$$v_n(x) = \max_{a \in [0, x]} [r(a) + v_{n-1}(x - a)],$$

$$0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq y,$$

- Για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_1(x) = r(x), \quad 0 \leq x \leq y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Για $n = 2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_2(x) = \max_{a \in [0, x]} [r(a) + r(x - a)], \quad 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + r(x - a), \quad a \in [0, x].$$

- Αν $r(x)$ παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή τότε $\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x - a)$.
- $\frac{df(a)}{da} = 0 \Rightarrow r'(a) = r'(x - a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$.
 $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Οπότε για την

$$f(a) = r(a) + r(x - a), \quad a \in [0, x],$$

έχουμε $f(a) \downarrow [0, \frac{x}{2})$ και $\uparrow (\frac{x}{2}, x]$.

- Άρα το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται για $a = 0$ ή $a = x$.
- Επομένως

$$v_2(x) = r(x), \quad 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_2^*(x) = 0 \text{ ή } x, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Τα αποτελέσματα για την

$$f(a) = r(a) + r(x - a), \quad a \in [0, x],$$

ισχύουν και χωρίς τις επιπλέον υποθέσεις για την $r(a)$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(a) + r(x - a) \leq r(x), \quad a \in [0, x].$$

- Πράγματι:

$$\begin{aligned} r(a) &= r\left(\left(1 - \frac{a}{x}\right)0 + \frac{a}{x}x\right) \leq \left(1 - \frac{a}{x}\right)r(0) + \frac{a}{x}r(x), \\ r(x - a) &= r\left(\frac{a}{x}0 + \left(1 - \frac{a}{x}\right)x\right) \leq \frac{a}{x}r(0) + \left(1 - \frac{a}{x}\right)r(x) \end{aligned}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$r(a) + r(x - a) \leq r(0) + r(x) \leq r(x).$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Βέλτιστη πολιτική για αύξουσα κυρτή συμμετρική περίπτωση

- Επαγωγικά, δείχνουμε ότι

$$v_n(x) = r(x), \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 2, 3, \dots, N.$$

- Η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο n είναι η $a_n^*(x) = 0$ ή η $a_n^*(x) = x$.
- Άρα στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων με αύξουσα κυρτή $r(a)$ και $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση υπαγορεύει να επενδυθεί όλο το κεφάλαιο σε μια επιλογή.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Συμμετρική περίπτωση, αύξουσα κοίλη απόδοση

- Ειδική περίπτωση:

$$r_n(a) = r(a), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$r(a) \geq 0, \text{ αύξουσα κοίλη, } r(0) = 0.$$

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$v_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq y$$

$$v_n(x) = \max_{a \in [0, x]} [r(a) + v_{n-1}(x - a)],$$

$$0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq y,$$

- Για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_1(x) = r(x), \quad 0 \leq x \leq y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Για $n = 2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_2(x) = \max_{a \in [0, x]} [r(a) + r(x - a)], \quad 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + r(x - a), \quad a \in [0, x].$$

- Αν $r(x)$ παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή τότε $\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x - a)$.
- $\frac{df(a)}{da} = 0 \Rightarrow r'(a) = r'(x - a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$.
 $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Οπότε για την

$$f(a) = r(a) + r(x - a), \quad a \in [0, x],$$

έχουμε $f(a) \uparrow [0, \frac{x}{2})$ και $\downarrow (\frac{x}{2}, x]$.

- Άρα το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται στο $a = \frac{x}{2}$.
- Επομένως

$$v_2(x) = 2r\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_2^*(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Τα αποτελέσματα για την

$$f(a) = r(a) + r(x - a), \quad a \in [0, x],$$

ισχύουν και χωρίς τις επιπλέον υποθέσεις για την $r(a)$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(a) + r(x - a) \leq 2r\left(\frac{x}{2}\right), \quad a \in [0, x].$$

- Πράγματι:

$$\frac{1}{2}r(a) + \frac{1}{2}r(x - a) \leq r\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(x - a)\right) = r\left(\frac{x}{2}\right),$$

οπότε

$$r(a) + r(x - a) \leq 2r\left(\frac{x}{2}\right).$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Έχουμε δει ότι

$$v_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq y,$$

$$v_1(x) = r(x), \quad 0 \leq x \leq y,$$

$$a_1^*(x) = x, \quad 0 \leq x \leq y,$$

$$v_2(x) = 2r\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq y,$$

$$a_2^*(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Βέλτιστη πολιτική για αύξουσα κοίλη συμμετρική περίπτωση

- Επαγωγικά, θα δείξουμε ότι

$$v_n(x) = nr \left(\frac{x}{n} \right), \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

με αντίστοιχη βέλτιστη απόφαση

$$a_n^*(x) = \frac{x}{n}, \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

- Άρα στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων με αύξουσα κοίλη $r(a)$ και $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση υπαγορεύει να επενδυθεί ισόποσα το κεφάλαιο σε όλες τις επιλογές.

Απόδειξη

- Για $n = 1$, $v_1(x) = r(x)$ και $a_1^*(x) = x$, οπότε ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n - 1$. Τότε:

$$v_n(x) = \max_{a \in [0, x]} \left(r(a) + (n - 1)r \left(\frac{x - a}{n - 1} \right) \right), \quad 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + (n - 1)r \left(\frac{x - a}{n - 1} \right).$$

Απόδειξη (συνέχεια)

- Για την

$$f(a) = r(a) + (n-1)r\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

έχουμε

$$\frac{1}{n}r(a) + \frac{n-1}{n}r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \leq r\left(\frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}\frac{x-a}{n-1}\right) = r\left(\frac{x}{n}\right),$$

οπότε

$$r(a) + (n-1)r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \leq nr\left(\frac{x}{n}\right).$$

Απόδειξη (συνέχεια)

- Αρχίζοντας με κεφάλαιο $y_N = y$ για κατανομή σε N επιλογές, το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y}{N}$ στην επιλογή N .
- Μένει κεφάλαιο $y_{N-1} = \frac{(N-1)y}{N}$ για κατανομή σε $N - 1$ επιλογές οπότε το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y_{N-1}}{N-1} = \frac{y}{N}$ στην επιλογή $N - 1$ κ.ο.κ.
- Επομένως, όλο το αρχικά διαθέσιμο κεφάλαιο θα πρέπει να επενδυθεί ισόποσα στις επιλογές.