

Εφαρμογές ανανεωτικών διαδικασιών κόστους και αναγεννητικών διαδικασιών

Αντικατάσταση μηχανήματος I

- Μηχανή με χρόνους λειτ. $O_1, O_2, \dots$ (oper. times) και χρόνους επισκευής $D_1, D_2, \dots$ (down times).
- Αντικατάσταση όταν χαλάσει ή όταν περάσει χρόνος s .
- Κόστη ανά αντικατάσταση:
 c_f (για βλάβη - failure),
 c_p (προληπτικά - preventive maintenance).
- (O_n, D_n) ανεξ. ισόν. $\sim F_{O,D}(x, y)$.
- $C(t)$: Κόστος για τις αντικαταστάσεις στο $(0, t]$.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους = ;
- Βέλτιστο $s =$;

Αντικατάσταση μηχανήματος II

- S_n : χρονική στιγμή ολοκλήρωσης n -οστής αντικατάστασης.
- Τότε:

$$X_n = S_n - S_{n-1} = \min(O_n, s) + D_n, \quad n \geq 1,$$

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = c_f 1_{\{O_n \leq s\}} + c_p 1_{\{O_n > s\}}, \quad n \geq 1.$$

- $(X_n, C_n), n \geq 1$, ανεξ. ισων.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Αντικατάσταση μηχανήματος III

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}E[X] &= E[\min(O, s)] + E[D] \\&= \int_0^\infty \Pr[\min(O, s) > t] dt + \int_0^\infty \Pr[D > t] dt \\&= \int_0^s (1 - F_O(t)) dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t)) dt, \\E[C] &= c_f \Pr[O_n \leq s] + c_p \Pr[O_n > s] \\&= c_f F_O(s) + c_p (1 - F_O(s)),\end{aligned}$$

- Επομένως

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{c_f F_O(s) + c_p (1 - F_O(s))}{\int_0^s (1 - F_O(t)) dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t)) dt}.$$

Αντικατάσταση μηχανήματος IV

- Κόστος ως συνάρτηση του s :

$$c(s) = \frac{c_p + (c_f - c_p)F_O(s)}{\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt}.$$

- $\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt \uparrow s$.
- $c_p + (c_f - c_p)F_O(s) \uparrow s$, όταν $c_f > c_p$,
 $c_p + (c_f - c_p)F_O(s)$ σταθερή, όταν $c_f = c_p$,
 $c_p + (c_f - c_p)F_O(s) \downarrow s$, όταν $c_f < c_p$.
- $c_f \leq c_p$ (δεν συμβαίνει στις εφαρμογές) $\Rightarrow c(s) \downarrow s$. Τότε βέλτιστο ∞ .
- $c_f > c_p$ (τυπικό στις εφαρμογές) $\Rightarrow$ Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $c(s)$ κλπ.

Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία I

- Μηχανή με χρόνους λειτ. $O_1, O_2, \dots$ (oper. times) και χρόνους επισκευής $D_1, D_2, \dots$ (down times).
- (O_n, D_n) , $n \geq 1$, ανεξ. ισόν. $\sim F_{O,D}(x, y)$.
- Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής = ;

Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία II

- Αναγεννητικά σημεία: Σημεία επαναλειτουργ. μηχανής.
- S_n : χρόνος λήξης n -οστής αντικατάστασης.
- $C(t)$: χρόνος λειτουργίας της μηχανής στο $(0, t]$.
- Έχουμε:

$$X_n = S_n - S_{n-1} = O_n + D_n, \quad n \geq 1,$$

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n, \quad n \geq 1.$$

- $(X_n, C_n), n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{E[O]}{E[O] + E[D]}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων I

- $\{A(t)\}$: αναν. διαδ. αφίξεων αντικειμένων σε αποθήκη.
- $Y_1, Y_2, \dots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $E[Y_i] = \mu$.
- Ακαριαία εκκαθάριση αποθήκης μόλις συγκεντρωθούν m προϊόντα.
- K : εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση.
- k : κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος.
- h : κόστος φύλαξης ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους = ;
- Βέλτιστο m = ;

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων II

- $\{N(t)\}$: αναν. διαδ. πλήθους εκκαθαρίσεων αποθήκης.
- S_n : χρόνος n -οστής εκκαθάρισης.
- $C(t)$: κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$.
- $Y_{n,i}$: ενδιάμεσος χρόνος της $\{A(t)\}$ πριν την άφιξη του i -οστού αντικειμένου που φθάνει στον n -οστο κύκλο (δηλαδή μεταξύ $n - 1$ -οστής και n -οστής εκκαθάρισης).

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων III

- Τότε:

$$X_n = \sum_{i=1}^m Y_{n,i}, \quad n \geq 1,$$

$$C_n = K + mk + h \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Y_{n,j}, \quad n \geq 1.$$

- $(X_n, C_n), n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων IV

- Υπολογισμοί:

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^m Y_{n,i}\right] = m\mu, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{aligned} E[C_n] &= E\left[K + mk + h \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Y_{n,j}\right] \\ &= K + mk + h \sum_{i=1}^m (m-i)\mu \\ &= K + mk + h \frac{(m-1)m}{2} \mu, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του m :

$$c(m) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων V

- Συνεχής επέκταση της $c(m)$ και παράγωγοι:

$$c(x) = \frac{K}{\mu x} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2},$$

$$c'(x) = -\frac{K}{\mu x^2} + \frac{h}{2},$$

$$c''(x) = \frac{2K}{\mu x^3},$$

- $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\mu}}.$$

- Βέλτιστο m : $m^* = \lfloor x^* \rfloor$ ή $m^* = \lceil x^* \rceil$.

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο I

- $\{A(t)\}$: Poisson διαδ. αφίξεων αντικειμένων σε αποθήκη με ρυθμό λ .
- $m = \frac{1}{\lambda}$: Μέσος ενδιαμέσος χρόνος αφίξεων αντικειμένων.
- Ακαριαία εκκαθάριση αποθήκης κάθε x χρονικές μονάδες.
- K : εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση.
- k : κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος.
- h : κόστος φύλαξης ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους = ;
- Βέλτιστο x = ;

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο II

- $\{N(t)\}$: αναν. διαδ. πλήθους εκκαθαρίσεων αποθήκης.
- $S_n = nx$: χρόνος n -οστής εκκαθάρισης.
- $C(t)$: κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$.

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο III

- Τότε:

$$X_n = S_n - S_{n-1} = x, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{aligned} C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) \\ &= K + k(A(nx) - A((n-1)x)) \\ &\quad + h \int_0^x (A((n-1)x + u) - A((n-1)x)) du, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

- $(X_n, C_n), n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο IV

- Υπολογισμοί:

$$E[X_n] = x, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{aligned} E[C_n] &= K + kE[A(nx) - A((n-1)x)] \\ &\quad + h \int_0^x E[A((n-1)x + u) - A((n-1)x)] du \\ &= K + k\lambda x + h \int_0^x \lambda u du \\ &= K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του x :

$$c(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο V

- Παραγωγή της $c(x)$

$$c(x) = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2},$$

$$c'(x) = -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2},$$

$$c''(x) = \frac{2K}{x^3}.$$

- $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}.$$

- Αναμενόμενος αριθμός συσσωρευμένων αντικειμένων:

$$\lambda x^* = \sqrt{2K\lambda/h} = \sqrt{2K/hm}.$$

Τύπος σε συμφωνία με το μοντέλο εκκαθάρισης