

Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους

Ανανεωτική διαδικασία κόστους

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $S_1, S_2, \dots$: χρόνοι γεγονότων.
- $X_1, X_2, \dots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $\{C(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία κόστους (συμβατή με την $\{N(t)\}$)



$(X_n, C_n), n \geq 1$ ανεξάρτητες τ.μ., όπου
 $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$.

- $F_{X,C}(x, y)$ σ.κ. των (X_n, C_n) : γεννώσα συνάρτηση κατανομής της $\{C(t)\}$.

Αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $S_1, S_2, \dots$: χρόνοι γεγονότων.
- $X_1, X_2, \dots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $Y_1, Y_2, \dots$: ανεξ. ισον., ανεξ. της $\{N(t)\}$.
- $g(x, y)$: συνάρτηση.
- Η $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i), \quad t \geq 0,$$

αναφέρεται ως αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους.

- Στο n -οστό γεγονός επάγεται κόστος $g(X_n, Y_n)$.

Ειδικές περιπτώσεις:

- $g(x, y) = 1 \Rightarrow C(t) = N(t)$ ανανεωτική διαδικασία.
- $g(x, y) = y \Rightarrow C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ σύνθετη ανανεωτική διαδικασία.

Π.χ.

- ① $N(t)$: πλήθος ζημιών σε ασφαλιστική εταιρεία, Y_i : ύψος i -οστής ζημιάς.
 - ② $N(t)$: πλήθος αφικνούμενων ομάδων σε σύστημα, Y_i : μέγεθος i -οστής ομάδας.
 - ③ $N(t)$: πλήθος παραγγελιών Y_i : μέγεθος i -οστής παραγγελίας.
- $g(x, y) = 1_{\{y>t\}}$.

Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (ΣΑΘΚ)

- $\{C(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία κόστους.
- (X, C) : τυπικό ζεύγος διάρκειας ανανεωτικού κύκλου και αντίστοιχης αμοιβής.
- $F_{X,C}(x, y)$: κατανομή (X, C) .
- Υποθέσεις: $E[X] < \infty$ και $E[C] < \infty$.
- Τότε:

- ❶ Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

- ❷ Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Ντετερμινιστικό ανάλογο του ΣΑΘΚ

- $c(t)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο x .
- Τότε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t c(u) du}{t} = \frac{\int_0^x c(u) du}{x}.$$

Αναγεννητικές διαδικασίες

Αναγεννητικές διαδικασίες - Ορισμός

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία



$\exists S_1 \geq 0$ με $\Pr[S_1 = 0] < 1$ και $\Pr[S_1 < \infty] = 1$:

- ① οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες, και
 - ② $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες.
- Διαισθητικά:
 $\{X(t)\}$ αναγεννητική $\Leftrightarrow \exists S_1$ ώστε από το S_1 και μετά η εξέλιξή να είναι σαν να ξεκινούσε από το 0.

Ανανεωτική διαδικασία αναγεννητικών σημείων

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική

$\Downarrow$

$\exists S_1 \leq S_2 \leq \dots:$

- ① $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες,
 - ② $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες.
- Τα $S_1, S_2, \dots$ λέγονται αναγεννητικά σημεία.
- Η $\{N(t)\}$ με

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

είναι η ανανεωτική διαδικασία των αναγεννητικών σημείων.

Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας I

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με καταστάσεις στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια.
- Οριακή δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u) \leq x\}} du}{t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\tau.μ.)$$

(μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που $\{X(t)\} \leq x$).

- Οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t 1_{\{X(u) \leq x\}} du \right]}{t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma)$$

(μακροπρόθ. μέσο ποσοστό χρόνου που $\{X(t)\} \leq x$).

Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας II

- Οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[X(t) \leq x], \quad x \in \mathbb{R}, \text{ (αριθμός),}$$

(πιθανότητα μια μακρινή χρονική στιγμή η $\{X(t)\}$ να είναι σε κατάσταση $\leq x$).

- C-οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u) \leq x] du}{t}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ (αριθμός)}$$

(πιθανότητα μια χρονική στιγμή ομοιόμορφα επιλεγμένη σε μεγάλο διάστημα η $\{X(t)\}$ να είναι σε κατάσταση $\leq x$).

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών I

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με καταστάσεις στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια.
- S ο 1ος χρόνος αναγέννησης.
- Η τ.μ.

$$\int_0^S 1_{\{X(u) \leq x\}} du$$

εκφράζει τον συνολικό χρόνο στο $(0, S]$ που η $\{X(t)\}$ είναι το πολύ x .

- Αν $E[S] < \infty$, ορίζουμε

$$F_X(x) = \frac{E[\int_0^S 1_{\{X(u) \leq x\}} du]}{E[S]}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$.

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών II

- Τότε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u) \leq x\}} du}{t} = F_X(x), \quad \text{με πιθανότητα 1, } x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u) \leq x\}} du]}{t} = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u) \leq x] du}{t} = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών III

- Αν, επιπλέον, η κατανομή του S είναι απεριοδική, δηλ. δεν υπάρχει $a > 0$ ώστε $\sum_{n=0}^{\infty} \Pr[S = na] = 1$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[X(t) \leq x] = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Συνοπτικά:
Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών:
Όλες οι οριακές κατανομές μιας αναγεννητικής διαδικασίας είναι ίσες.

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας I

- $\{X(t)\}$: αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστ. $\mathbb{R}$.
- $c(x)$: άνω ή κάτω φραγμένη συνάρτηση που εκφράζει το κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση x .
- Συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στο $(0, t]$:

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du \text{ (τ.μ.)}.$$

- X τ.μ. με την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$.

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας II

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} = E[c(X)], \text{ με πιθανότητα } 1. \quad (2)$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = E[c(X)]. \quad (3)$$

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας III

- Η μέση τιμή $E[c(X)]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E[c(X)] &= \frac{E[\int_0^S c(X(u))du]}{E[S]} = \frac{E[C(S)]}{E[S]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c(x) dF_X(x) \\ &= \begin{cases} \sum_x c(x) f_X(x) & \text{αν } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(x) f_X(x) dx & \text{αν } X \text{ συνεχής,} \end{cases} \end{aligned}$$

όπου S ο χρόνος 1ης αναγέννησης της $\{X(t)\}$.

- Αν η κατανομή του S απεριοδική:

$$E[c(X)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[c(X(t))].$$