

Ανανεωτικός συλλογισμός

Ανανεωτικές εξισώσεις

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Ιδέα

- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία.
- $h(t)$: συνάρτηση που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανανεωτικής διαδικασίας στο $(0, t]$,
π.χ. $m(t)$ ή $E[S_{N(t)+1} - t]$
- Ανανεωτικός συλλογισμός: Δέσμευση στον χρόνο $S_1 = u$ του πρώτου ανανεωτικού γεγονότος για τον υπολογισμό της ποσότητας.
- Η τεχνική οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις συγκεκριμένου τύπου.

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Εξισώσεις

- Ο ανανεωτικός συλλογισμός οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις του τύπου

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

όπου

$h(t)$: η υπό μελέτη (άγνωστη) ποσότητα,

$d(t)$: μια γνωστή συνάρτηση,

$F_X(t)$: η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα: Ανανεωτική εξίσωση για την $m(t)$

- $h(t) = m(t)$: ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$,
- S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$,
- $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(N(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} 1 + N(t - u).$$

- Επομένως,

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t - u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= F_X(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = F_X(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = F_X(t)$.

- Αναφέρεται ως η ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση.

Παράδ: Αναν. εξίσωση για $R(t) = E[S_{N(t)+1} - t]$

- $h(t) = E[R(t)] = E[S_{N(t)+1} - t]$: μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t , δηλαδή ο μέσος χρόνος που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός από τη στιγμή t .
- S_1 : ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$.
- $F_X(t)$: η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(R(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} R(t - u).$$

- Επομένως,

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t - u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t - u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$h(t) = \int_t^\infty (u - t) dF_X(u) + \int_0^t h(t - u) dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = \int_t^\infty (u - t) dF_X(u) + \int_0^t h(t - u) dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t - u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_t^\infty (u - t) dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u) dy = \int_t^\infty (1 - F_X(y)) dy. \end{aligned}$$

Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

- Ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

- Μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u) dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t),$$

$m_X(t)$: η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $F_X(t)$.

Λύση ανανεωτικής εξίσωσης - Αιτιολόγηση

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{F}_X(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \tilde{d}(s) \frac{1 - \tilde{F}_X(s) + \tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s) \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\tilde{m}_X(s)$$

$$\Rightarrow h(t) = d(t) + (d * m_X)(t).$$

Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης - λύσης

- Έστω ότι κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ επάγει μια επίδραση που διαχέεται στον χρόνο.
- $d(t)$: Επίδραση ενός γεγονότος t χρονικές μονάδες μετά την εκδήλωσή του.
- $h(t)$: Συνολική επίδραση από όλα τα γεγονότα μέχρι τη στιγμή t .
- Έστω ότι συμβαίνει γεγονός (γεγονός-0) τη στιγμή 0.

Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης (συνέχεια)

- Συνολική επίδραση τη στιγμή t
= Επίδραση από γεγονός-0 + Συνολική επίδραση από τα υπόλοιπα γεγονότα.
- Ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u).$$

Ερμηνεία λύσης (συνέχεια)

- Συνολική επίδραση τη στιγμή t
 $=$ Επίδραση από γεγονός-0 + Άθροισμα επιδράσεων από τα υπόλοιπα γεγονότα.
- Λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u) dF_{S_k}(u) \\
 &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u) dF_X^{*k}(u) \\
 &= d(t) + \int_0^t d(t-u) dm_X(u).
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ανανεωτική εξίσωση για μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $h(t) = E[R(t)]$:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

$$\text{με } d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y)) dy$$

- Λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} h(t) &= d(t) + \int_0^t d(t-u) dm_X(u) \\ &= \int_t^\infty (1 - F_X(y)) dy + \int_0^t \int_{t-u}^\infty (1 - F_X(y)) dy dm_X(u). \end{aligned}$$

- Δύσχρηστος. Συχνά ενδιαφέρει μόνο η οριακή λύση, $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$.

Υπολογισμοί ανανεωτικών συναρτήσεων

- Υπολογισμός $m_X(t)$: Απαραίτητος για τη χρήση λύσεων ανανεωτικών εξισώσεων.
- 3 βασικοί τρόποι:
 - 1 Αρχικός τύπος:

$$m_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).$$

- 2 Τύπος μετασχηματισμού LS + Αντιστροφή:

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

- 3 Αναν. εξίσωση + Μετατροπή σε διαφορική + Λύση:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u) dF_X(u).$$

Παράδειγμα υπολογισμού αναν. συνάρτησης

- $X \sim \text{Hyperexponential}(p, \lambda, q, \mu), \text{δηλ.}$

$$X = \begin{cases} Y \sim \text{Exp}(\lambda) & \text{με πιθαν. } p, \\ Z \sim \text{Exp}(\mu) & \text{με πιθαν. } q. \end{cases}$$

οπότε

$$F_X(t) = pF_Y(t) + qF_Z(t).$$

- $m_X(t) =;$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Με τον αρχικό τύπο:

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (pF_Y + qF_Z)^{*k}(t) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^j q^{k-j} (F_Y^{*j} * F_Z^{*k-j})(t) \\
 &= \dots,
 \end{aligned}$$

$F_Y^{*j}(t)$: Συνάρτηση κατανομής της Erlang(j, λ),
 $F_Z^{*k-j}(t)$: Συνάρτηση κατανομής της Erlang($k - j, \mu$).

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Με τον τύπο του μετασχηματισμού LS:

$$\tilde{m}_X(t) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{F}_X(s) &= p\tilde{F}_Y(s) + q\tilde{F}_Z(s) \\ &= p\frac{\lambda}{\lambda + s} + q\frac{\mu}{\mu + s}.\end{aligned}$$

- Άρα

$$\tilde{m}_X(s) = \dots = \frac{(\lambda p + \mu q)s + \lambda \mu}{s(s + \lambda q + \mu p)}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda q + \mu p} = \frac{A(s + \lambda q + \mu p) + Bs}{s(s + \lambda q + \mu p)}.$$

- Εύρεση των σταθερών:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_X(s) &= \frac{(\lambda p + \mu q)s + \lambda \mu}{s(s + \lambda q + \mu p)} = \frac{A(s + \lambda q + \mu p) + Bs}{s(s + \lambda q + \mu p)} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = \lambda p + \mu q \\ (\lambda q + \mu p)A = \lambda \mu \end{array} \right\} &\Rightarrow A, B = \dots \end{aligned}$$

- Αντιστροφή:

$$m_X(t) = At + \frac{B}{\lambda q + \mu p} (1 - e^{-(\lambda q + \mu p)t}).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αναν. εξίσωση + Μετατροπή σε διαφορική + Λύση:

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= F_X(t) + (F_X * m_X)(t) \\
 \Rightarrow m_X(t) &= 1 - pe^{-\lambda t} - qe^{-\mu t} \\
 &\quad + \int_0^t (1 - pe^{-\lambda(t-u)} - qe^{-\mu(t-u)}) m'_X(u) du \\
 \Rightarrow \dots
 \end{aligned}$$