Μέρος IV

ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε εφαρμογές των στοχαστικών μοντέλων σε προβλήματα διαχείρισης και ελέγχου αποθεμάτων. Το αντικείμενο της Θεωρίας Αποθεμάτων η μελέτη συστημάτων στα οποία ένα ή περισσότερα αγαθά αποθηκεύονται για μελλοντική χρήση. Τα κύρια ερωτήματα που προκύπτουν σε αυτά τα συστήματα αφορούν τις ποσότητες που πρέπει να αποθηκευτούν και τις χρονικές στιγμές που πρέπει να γίνουν οι παραγγελίες για αυτές τις ποσότητες. Από την πλευρά των εφαρμογών τα προβλήματα αυτά έχουν μεγάλη οικονομική σημασία, επειδή τα αποθέματα παίζουν κρίσιμο ρόλο στην αποτελεσματική οργάνωση της παραγωγής, μεταφοράς και διακίνησης προϊόντων, αλλά από την άλλη πλευρά εισάγουν σημαντικά κόστη στην παραγωγική διαδικασία. Τα προβλήματα της Θεωρίας Αποθεμάτων έχουν επίσης μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον, καθώς τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύσσονται για τη μελέτη τους είναι συνήθως πολύπλοκα και απαιτούν ισχυρή μαθηματική και υπολογιστική μεθοδολογία. Έχουν επίσης άμεση σχέση με τα μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, επειδή τα αποθέματα είναι διαδικασίες αποφάσεων που εξελίσσονται στο χρόνο κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, εξ αιτίας των διακυμάνσεων στη ζήτηση, τη διαθεσιμότητα των προμηθευτών, τους χρόνους παράδοσης, κλπ, ενώ ταυτόχρονα απαιτούν τη λήψη αποφάσεων με κριτήριο ελαχιστοποίηση κόστους ή μεγιστοποίηση ωφέλειας.

11.1 Η Έννοια του Αποθέματος – Πλεονεκτήματα και Κόστη Αποθεμάτων

Με τον όρο απόθεμα εννοούμε μια ποσότητα ενός αγαθού που αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση. Με τον όρο προϊόν θα αναφερόμαστε στο αγαθό που αποθηκεύεται, παρ' όλο που στη γενική περίπτωση αυτό μπορεί να μην είναι ένα προϊόν παραγωγής αλλά και άλλου τύπου υλικό. Σε μια παραγωγική διαδικασία γενικά διατηρούνται αποθέματα πολλών διαφορετικών τύπων (πρώτων υλών, ενδιάμεσων ή ημιτελών προϊόντων, τελικών προϊόντων, ανταλλακτικών, κλπ). Αν και για κάθε κατηγορία προκύπτουν αρκετά επί μέρους ερωτήματα και προβλήματα, σε όλες υπάρχουν και πολλά κοινά βασικά στοιχεία, που αφορούν τους λόγους που απαιτείται διατήρηση αποθέματος και τα πλεονεκτήματα που αυτό προσφέρει, αλλά ταυτόχρονα και παράγοντες κόστους που εισάγονται από αυτή τη δραστηριότητα.

Τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η διατήρηση αποθεμάτων είναι ποικίλα, αλλά τα πιο βασικά μπορούν να

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2022). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα».
Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. https://www.kallipos.gr/

συνοψιστούν ως εξής:

Οικονομίες Κλίμακας Έστω Q η ποσότητα ενός προϊόντος που παράγεται σε ένα κύκλο παραγωγής ή παραγγέλλεται από έναν εξωτερικό προμηθευτή, και $C(Q)$ το συνολικό κόστος παραγωγής ή κτήσης αυτής της ποσότητας. Ο όρος οικονομίες κλίμακας αναφέρεται στο φαινόμενο όπου το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος $\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας Q. Πολλές παραγωγικές διαδικασίες εμφανίζουν οικονομίες κλίμακας για διάφορους λόγους, π.χ. επειδή με την αύξηση της παραγόμενης ποσότητας το ανθρώπινο δυναμικό εξοικειώνεται και εργάζεται πιο αποτελεσματικά με αποτέλεσμα την αύξηση της παραγωγικότητας κλπ.

Ένας συνηθισμένος λόγος είναι η ύπαρξη σταθερού (πάγιου) κόστους παραγωγής ή παραγγελίας, το οποίο είναι ανεξάρτητο της ποσότητας. Ως ένα απλό παράδειγμα θεωρούμε τη συνάρτηση κόστους $C(Q) = K + cQ$, όπου K είναι το σταθερό κόστος που πληρώνεται ανεξάρτητα από την ποσότητα που παράγεται, και c είναι το μοναδιαίο κόστος παραγωγής. Σε περιπτώσεις που η ποσότητα Q παράγεται, το κόστος K προκύπτει επειδή για να ξεκινήσει η παραγωγή συνήθως απαιτούνται δραστηριότητες όπως ρύθμιση μηχανημάτων, αλλαγές υλικών κλπ, ανεξάρτητα από την ποσότητα που παράγεται. Αν το προϊόν αγοράζεται από εξωτερική πηγή, το κόστος K αναφέρεται ως σταθερό κόστος παραγγελίας και περιλαμβάνει όλα τα διαδικαστικά κόστη υποβολής της παραγγελίας, σταθερά κόστη παράδοσης (π.χ. στην περίπτωση που ο προμηθευτής χρεώνει ένα σταθερό κόστος για τη μεταφορά του προϊόντος ανεξάρτητα από την ποσότητα που παραδίδεται) κλπ. Το κόστος ανά μονάδα c συνήθως αναφέρεται στο πραγματικό κόστος της παραγωγής (υλικά, εργασία κλπ), ή αγοράς του προϊόντος. Στο παράδειγμα αυτό το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος είναι ίσο με $\bar{C}(Q) = \frac{K}{Q} + c$, που είναι φθίνουσα συνάρτηση του Q, επομένως η συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους παρουσιάζει οικονομίες κλίμακας. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα, το σταθερό κόστος επιμερίζεται σε μεγαλύτερη ποσότητα με αποτέλεσμα το μέσο κόστος να μειώνεται.

Από την παραπάνω συζήτηση γίνεται φανερό ότι αν ένα προϊόν εμφανίζει οικονομίες κλίμακας, η παραγωγή ή αγορά μεγαλύτερων ποσοτήτων από ότι είναι άμεσα απαραίτητο και η αποθήκευσή τους για μελλοντική χρήση δίνει οικονομικό πλεονέκτημα γιατί μειώνει το κόστος παραγωγής ή κτήσης του προϊόντος. Στην περίπτωση του σταθερού κόστους, αυτό σημαίνει ότι με το να παράγονται ή να αγοράζονται μεγαλύτερες ποσότητες σε ένα κύκλο, το σταθερό κόστος πληρώνεται πιο σπάνια επειδή αποφεύγονται οι συχνές παραγγελίες. Γενικά οι οικονομίες κλίμακας είναι ένας από τους βασικότερους λόγους διατήρησης αποθεμάτων σε προϊόντα μαζικής κατανάλωσης με μεγάλους όγκους παραγωγής και πωλήσεων.

Εξομάλυνση Παραγωγής Σε πολλά προϊόντα οι πωλήσεις παρουσιάζουν σημαντικές εποχιακές διακυμάνσεις (π.χ. σε χειμερινά ή καλοκαιρινά ρούχα). Αν τα προϊόντα αυτά παράγονται σε εξειδικευμένα μηχανήματα που δεν έχουν μεγάλη ευελιξία, τότε για να αντιμετωπιστεί θα πρέπει η παραγωγή να έχει μεγάλη δυναμικότητα που όμως θα χρησιμοποιείται για περιορισμένο χρονικό διάστημα και τον υπόλοιπο χρόνο θα παραμένει ανενεργή. Εναλλακτικά η παραγωγή μπορεί να γίνεται σταδιακά με μικρότερο ρυθμό σε όλη τη διάρκεια του χρόνου και το προϊόν να αποθηκεύεται για πώληση στις περιόδους μεγάλης ζήτησης. Επομένως η διατήρηση αποθεμάτων συντελεί στην αύξηση της αποδοτικότητας της παραγωγής.

Αντιμετώπιση Αβεβαιότητας Η αβεβαιότητα είναι ίσως ο σημαντικότερος παράγοντας που οδηγεί σε διατήρηση αποθεμάτων σε μια παραγωγική διαδικασία. Η αβεβαιότητα υπεισέρχεται με πολλούς τρόπους και επιφέρει σημαντική πολυπλοκότητα στη μελέτη και ανάλυση αυτών των προβλημάτων. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι οι τυχαίες διακυμάνσεις στη ζήτηση του προϊόντος. Σε περιπτώσεις που η ζήτηση έχει σημαντική διακύμανση, η διατήρηση ποσοτήτων προϊόντος σε απόθεμα είναι ένα μέσο προστασίας και αποφυγής ελλείψεων. Εκτός από τη ζήτηση, αβεβαιότητα και διακυμάνσεις μπορεί να υπάρχουν και στην διαθεσιμότητα του προϊόντος, δηλαδή στη δυναμικότητα της παραγωγής που μπορεί να επηρεάζεται από καιρικά φαινόμενα, βλάβες των μηχανημάτων κλπ., στην διαθεσιμότητα πρώτων υλών που εξαρτάται από τους προμηθευτές κλπ. Επιπλέον, αβεβαιότητα μπορεί να υπάρχει και στο χρόνο παράδοσης των παραγγελιών εξ αιτίας προβλημάτων στη μεταφορά και τη διακίνηση των προϊόντων. Τα αποθέματα που διατηρούνται για την αντιμετώπιση ελλείψεων εξ αιτίας απρόβλεπτων γεγονότων στη ζήτηση, τις προμήθειες ή τους χρόνους παράδοσης ονομάζονται αποθέματα ασφαλείας. Τέλος, μια σημαντική πηγή αβεβαιότητας είναι και οι διακυμάνσεις στα κόστη παραγωγής και πρώτων υλών. Σε περιόδους έντονων διακυμάνσεων, η διατήρηση αποθεμάτων μπορεί να παρέχει σημαντική εξασφάλιση έναντι μελλοντικών αυξήσεων του κόστους.

Παρ΄όλα τα πλεονεκτήματα που προσφέρει σε μια παραγωγική διαδικασία, η διατήρηση αποθεμάτων εισάγει επίσης και σημαντικά πρόσθετα κόστη. Τα κόστη αυτά προέρχονται από διάφορες πηγές, όπως η επένδυση για τη δημιουργία ή ενοικίαση αποθηκευτικών χώρων, τα λειτουργικά κόστη των αποθηκών, οι απώλειες προϊόντων λόγω φθοράς κατά τη διάρκεια της αποθήκευσης, η απαξίωση των προϊόντων με την πάροδο του χρόνου σε περιπτώσεις που υπάρχουν νεότερες εκδόσεις ή μοντέλα, κλπ. Τέλος ένας σημαντικός παράγοντας είναι το κόστος δεσμευμένου κεφαλαίου. Αυτό είναι το έμμεσο κόστος που προκύπτει από το γεγονός ότι το κεφάλαιο που δαπανήθηκε για την παραγωγή ή αγορά των αποθηκευμένων προϊόντων δεν έχει κάποια απόδοση όσο το προϊόν παραμένει στην αποθήκη, ενώ αν η παραγωγή καθυστερούσε μέχρι τη στιγμή που η αντίστοιχη ποσότητα θα χρειαζόταν να διατεθεί, το κεφάλαιο αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στο ενδιάμεσο διάστημα σε άλλες δραστηριότητες και να αποδώσει κέρδος.

Από την παραπάνω συζήτηση φαίνεται ότι η διαχείριση αποθεμάτων είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που συνδέεται άμεσα με την γενικότερη οργάνωση της παραγωγής και διακίνησης προϊόντων από μια εταιρεία η έναν οργανισμό. Το αντικείμενο της Θεωρίας Αποθεμάτων είναι η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την ανάλυση των προβλημάτων που προκύπτουν όταν διατηρούνται αποθέματα με σκοπό την αποτελεσματική διαχείριση αυτών των διαδικασιών.

11.2 Κατηγορίες Προβλημάτων Διαχείρισης Αποθεμάτων

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι στη διαχείριση αποθεμάτων υπεισέρχονται πολλοί και διαφορετικοί παράγοντες, με αποτέλεσμα τα προβλήματα που προκύπτουν να έχουν μεγάλη ποικιλία, ανάλογα με τον τύπο του προϊόντος, τις συνθήκες της παραγωγής και διακίνησης, και τον τρόπο που αυτά μοντελοποιούνται. Παρακάτω αναφέρουμε μερικές βασικές κατηγοριοποιήσεις των προβλημάτων της Θεωρίας Αποθεμάτων σχετικά με τον τρόπο παρακολούθησης του αποθέματος, τη μοντελοποίηση ή όχι της αβεβαιότητας, τον τρόπο αντιμετώπισης των ελλείψεων, τη δομή του συστήματος παραγωγής και αποθήκευσης.

Η πρώτη κατηγοριοποίηση αναφέρεται στον τρόπο παρακολούθησης του αποθέματος και με βάση αυτό τα προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων διακρίνονται σε προβλήματα συνεχούς ή περιοδικής παρακολούθησης. Στα προβλήματα συνεχούς παρακολούθησης, ο διαχειριστής του συστήματος έχει συνεχώς πληροφόρηση σχετικά με το ύψος των αποθεμάτων και μπορεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή να κάνει νέες παραγγελίες. Λόγω της εκτεταμένης μηχανογράφησης των αποθηκών, τα μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο στις εφαρμογές. Αντίθετα στα προβλήματα περιοδικής παρακολούθησης, ο διαχειριστής μπορεί να κάνει νέες παραγγελίες μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που συνήθως είναι περιοδικές (π.χ. στο τέλος της μέρας ή της εβδομάδας). Σε πολλές περιπτώσεις στην πράξη, παρ' όλο που ο διαχειριστής μπορεί να έχει συνεχώς πληροφόρηση για τα αποθέματα, αν υπάρχει περιορισμός ως προς το χρόνο των παραγγελιών, το πρόβλημα κατατάσσεται στην κατηγορία της περιοδικής παρακολούθησης.

Σχετικά με την αβεβαιότητα, τα μοντέλα διακρίνονται σε ντετερμινιστικά, όπου όλες οι παράμετροι του προβλήματος (ζήτηση, χρόνοι παράδοσης, κόστη κλπ), θεωρούνται γνωστές, και σε στοχαστικά, όπου τουλάχιστον μια παράμετρος υπόκειται σε αβεβαιότητα και θεωρείται τυχαία μεταβλητή ή στοχαστική διαδικασία. Και στις δύο περιπτώσεις οι παράμετροι του συστήματος δεν είναι απαραίτητο να είναι σταθερές αλλά μπορεί να μεταβάλλονται με το χρόνο. Για παράδειγμα η ζήτηση ενός εποχιακού προϊόντος μπορεί να έχει διακυμάνσεις στη διάρκεια ενός έτους. Στα ντετερμινιστικά μοντέλα αυτές οι χρονικές μεταβολές θεωρούνται γνωστές, ενώ στα στοχαστικά συνήθως μοντελοποιούνται μέσω μιας κατάλληλης στοχαστικής ανέλιξης.

Η δομή του συστήματος παραγωγής και αποθήκευσης αναφέρεται στον τρόπο που τα στάδια της παραγωγής ή διακίνησης ενός προϊόντος συνδέονται και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Σε ένα απλό σύστημα με ένα στάδιο η παραγωγή ολοκληρώνεται σε ένα σταθμό, πριν και μετά από τον οποίο μπορεί να υπάρχουν αποθέματα πρώτων υλών και τελικών προϊόντων. Σε ένα σειριακό σύστημα η παραγωγή γίνεται σε στάδια που ακολουθούν το ένα το άλλο με συγκεκριμένη σειρά, και μεταξύ των διαδοχικών σταθμών επεξεργασίας μπορεί επίσης να υπάρχουν αποθηκευτικοί χώροι για τα ημιτελή προϊόντα. Τέλος σε ένα γενικό σύστημα, τα στάδια επεξεργασίας μπορεί να είναι διαφορετικά για διαφορετικού τύπου προϊόντα και η διασύνδεση μεταξύ των σταθμών μοντελοποιείται μέσω κατάλληλου δικτύου, ενώ αποθηκευτικοί χώροι μπορεί να υπάρχουν σε διάφορα σημεία του δικτύου παραγωγής. Επίσης οι αποθηκευτικοί χώροι μπορεί να έχουν πεπερασμένη χωρητικότητα, με αποτέλεσμα όταν το απόθεμα υπερβεί ένα συγκεκριμένο ύψος να μη μπορούν να γίνουν νέες παραλαβές, ή μπορεί να θεωρούνται άπειρης χωρητικότητας και να μην υπεισέρχονται περιορισμοί αυτού του τύπου.

Οι ελλείψεις είναι ένα σημαντικό στοιχείο στα προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων και ο τρόπος αντιμετώπισής τους επίσης διαφέρει από ένα σύστημα σε άλλο. Γενικά με τον όρο έλλειψη εννοούμε την περίπτωση όπου έρχεται ζήτηση για μια ποσότητα προϊόντος, αλλά δεν υπάρχει αρκετό απόθεμα για να ικανοποιηθεί. Για την περίπτωση αποθέματος σε τελικά προϊόντα, οι ελλείψεις συνήθως αντιμετωπίζονται είτε ως χαμένες πωλήσεις είτε ως εκκρεμότητες προς τους πελάτες. Στην πρώτη περίπτωση μια ζήτηση που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί άμεσα απορρίπτεται και η πώληση χάνεται. Στη δεύτερη περίπτωση η ποσότητα που ζητείται από τον πελάτη μπαίνει σε εκκρεμότητα με την προοπτική να παραδοθεί όταν έρθουν νέες ποσότητες προϊόντος στην αποθήκη. Η ποσότητα προϊόντος που αντιστοιχεί σε εκκρεμή ζήτηση ονομάζεται εκκρεμότητα (backlog) και συνήθως μοντελοποιείται ως αρνητικό απόθεμα. Όταν το απόθεμα αναφέρεται σε πρώτη ύλη ή ημιτελές προϊόν σε κάποιο στάδιο του συστήματος παραγωγής, οι συνέπειες των ελλείψεων είναι γενικά πιο περίπλοκες, επειδή μπορεί η έλλειψη προϊόντος σε ένα στάδιο της παραγωγής μπορεί να σταματήσει την παραγωγή σε άλλα στάδια που χρειάζονται το συγκεκριμένο προϊόν για να προχωρήσουν. Πρέπει τέλος να τονιστεί ότι ενώ οι ελλείψεις συνήθως προκαλούνται από τις τυχαίες διακυμάνσεις στη ζήτηση ή τη διαθεσιμότητα του προϊόντος και θεωρούνται ανεπιθύμητα φαινόμενα, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι ελλείψεις και η ικανοποίηση μέρους ή όλης της ζήτησης από backlog είναι μέρος του συνολικού προγραμματισμού της παραγωγής και διακίνησης του προϊόντος (π.χ. στα ηλεκτρονικά καταστήματα πωλήσεων κατά κανόνα η ζήτηση ικανοποιείται ένα χρονικό διάστημα μετά από την παραγγελία του πελάτη).

11.3 Το Πρόβλημα της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε ένα πρώτο βασικό μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων, το πρόβλημα της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας (Economic Order Quantity - EOQ model). Αν και το πρόβλημα είναι ντετερμινιστικό, είναι χρήσιμο να αναλυθεί, αφενός επειδή βάζει τις βάσεις για τη μελέτη πολλών πιο προχωρημένων μοντέλων και αφετέρου επειδή, παρ' όλη την απλότητά του, έχει βρει αρκετές εφαρμογές στην πράξη.

Το μοντέλο EOQ εστιάζει στην αλληλεπίδραση δύο βασικών ανταγωνιστικών παραγόντων στη διαχείριση αποθεμάτων: αφενός των οικονομιών κλίμακας που οδηγούν σε μεγάλες αγορές και αφετέρου του κόστους αποθήκευσης που οδηγεί σε χαμηλότερα επίπεδα αποθέματος. Το μοντέλο έχει εφαρμογές σε προϊόντα μαζικής κατανάλωσης και μεγάλου όγκου πωλήσεων, στα οποία η ζήτηση δεν παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις μέσα στο χρόνο και μπορεί πρακτικά να θεωρηθεί γνωστή και σταθερή.

Το βασικό μοντέλο EOQ μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Θεωρούμε ένα μοντέλο ελέγχου αποθέματος συνεχούς επιθεώρησης για ένα συγκεκριμένο προϊόν, του οποίου η ζήτηση είναι γνωστή και σταθερή, ίση με a ανά μονάδα χρόνου. Υποθέτουμε ότι το προϊόν αγοράζεται και πωλείται σε συνεχείς ποσότητες. Οι παραγγελίες για αναπλήρωση του αποθέματος μπορούν να γίνουν οποιαδήποτε στιγμή και σε οποιαδήποτε ποσότητα, ενώ ο χρόνος παράδοσης είναι μηδενικός, δηλαδή η νέα ποσότητα προϊόντος έρχεται ακαριαία στην αποθήκη τη στιγμή που γίνεται η παραγγελία. Επειδή η ζήτηση είναι γνωστή, οι ελλείψεις μπορούν να αποφευχθούν και υπάρχουν μόνο όταν είναι προγραμματισμένες. Στο βασικό μοντέλο EOQ δεν επιτρέπονται.

Σχετικά με τα κόστη που υπεισέρχονται, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα πάγιο κόστος K κάθε φορά που στέλνεται μια νέα παραγγελία, καθώς και κόστος c ανά κομμάτι που παραγγέλλεται. Επίσης, υπάρχει κόστος αποθήκευσης h ανά κομμάτι και χρονική μονάδα. Το πρόβλημα του διαχειριστή είναι να προσδιορίσει μια πολιτική παραγγελιών (δηλαδή τις χρονικές στιγμές που πρέπει να γίνονται οι παραγγελίες και τις αντίστοιχες ποσότητες), έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

Προχωρούμε τώρα στην ανάλυση αυτού του μοντέλου. Αρχικά μπορούμε να κάνουμε δύο βασικές παρατηρήσεις που απλοποιούν σημαντικά την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής. Πρώτον, είναι εύκολο να δούμε ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι ποτέ βέλτιστο να γίνονται παραγγελίες πριν εξαντληθεί το απόθεμα. Πράγματι, αφού οι νέες παραγγελίες έρχονται αμέσως, δεν υπάρχει λόγος να έρχονται νέες ποσότητες πριν να εξαντληθεί το προηγούμενο απόθεμα, επειδή αν γίνει αυτό θα αυξηθεί το κόστος αποθήκευσης χωρίς να υπάρχει λόγος. Μαθηματικά αυτή η ιδιότητα εκφράζεται ως εξής: Αν $I(t)$ και $Q(t)$ είναι το επίπεδο αποθέματος και η ποσότητα που παραγγελίας, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή t, τότε πρέπει να ισχύει $I(t)Q(t) = 0$ για κάθε $tgeq0$. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως ιδιότητα μηδενικού αποθέματος (zero inventory property) και ικανοποιείται από τη βέλτιστη πολιτική σε γενικότερα προβλήματα όπου δεν επιτρέπονται ελλείψεις και ο χρόνος παράδοσης είναι μηδενικός. Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι κάθε φορά που γίνονται παραγγελία το σύστημα βρίσκεται ακριβώς στην ίδια κατάσταση, δηλαδή το απόθεμα είναι μηδενικό, ο ορίζοντας προγραμματισμού είναι άπειρος και η ζήτηση και τα κόστη είναι σταθερά. Επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει μια βέλτιστη πολιτική με σταθερή ποσότητα παραγγελίας ανεξάρτητη από το χρόνο, δηλαδή μια στάσιμη πολιτική.

Μια στάσιμη πολιτική παραγγελιών που ικανοποιεί την ιδιότητα μηδενικού αποθέματος χαρακτηρίζεται από μια μοναδική παράμετρο Q που είναι η ποσότητα παραγγελίας κάθε φορά που μηδενίζεται το απόθεμα. Με βάση τα παραπάνω, χωρίς βλάβη της γενικότητας η βέλτιστη πολιτική μπορεί να αναζητηθεί μέσα στο στο σύνολο των πολιτικών αυτού του τύπου. Κάτω από μια πολιτική παραγγελιών με ποσότητα Q, η στάθμη του αποθέματος μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ των τιμών 0 και Q. Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αναπληρώσεων του αποθέματος αναφέρεται ως κύκλος αποθέματος και έχει διάρκεια ίση με $T = Q/a$. Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου η στάθμη του αποθέματος ξεκινά από το σημείο Q και μειώνεται γραμμικά μέχρι να φθάσει στο μηδέν. Με άλλα λόγια, το ύψος του αποθέματος t χρονικές μονάδες μετά την παραλαβή της τελευταίας παραγγελίας είναι $Q - at$, $t \in [0, Q/a)$.

Τα κόστη που συσσωρεύονται σε έναν κύκλο είναι το πάγιο κόστος παραγγελίας K, το κόστος παραγγελίας για ποσότητα Q προϊόντων που ισούται με cQ, καθώς και κόστη αποθήκευσης. Το συνολικό κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με

$$h \int_0^{Q/a} (Q - at)dt = \frac{hQ^2}{2a}.$$

Επομένως το συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με $K + cQ + frachQ^2 2a$, και το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με το λόγο του κόστους ενός κύκλου προς το μήκος του κύκλου, δηλαδή:

$$C(Q) = \frac{K + cQ + hQ^2/(2a)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}. \tag{11.1}$$

Η συνάρτηση $C(Q)$ είναι κυρτή ως προς Q και ελαχιστοποιείται όταν $C'(Q) = 0$. Λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}. \tag{11.2}$$

Η ποσότητα Q^* λέγεται Οικονομική Ποσότητα Παραγγελίας (EOQ). Επομένως η πολιτική παραγγελιών που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα είναι να γίνονται παραγγελίες μεγέθους Q^* τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται το απόθεμα.

Κάτω από την πολιτική EOQ το μήκος του κύκλου, δηλαδή το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών είναι ίσο με

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}},$$

ενώ η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους είναι ίση με

$$C^* = C(Q^*) = \sqrt{2aKh}.$$

11.4 Επεκτάσεις του Προβλήματος της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι το πρόβλημα της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας βασίζεται σε πολλές απλουστευτικές παραδοχές, που αφενός διευκολύνουν την ανάλυση, αφετέρου όμως εισάγουν περιορισμούς όσον αφορά την εφαρμοσιμότητά του. Θα δούμε παρακάτω μερικές χρήσιμες γενικεύσεις του βασικού μοντέλου.

11.4.1 Μη μηδενικός χρόνος παράδοσης

Η πρώτη επέκταση αφορά την ύπαρξη μη μηδενικού χρόνου παράδοσης. Υποθέτουμε ότι μεταξύ της στιγμής μιας παραγγελίας και της άφιξης της νέας ποσότητας στην αποθήκη μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα L που αναφέρεται ως χρόνος παράδοσης ή χρόνος καθυστέρησης (lead-time). Εδώ υποθέτουμε ότι η τιμή του L είναι γνωστή και σταθερή. Τα υπόλοιπα στοιχεία του προβλήματος, δηλαδή η ζήτηση και τα κόστη παραμένουν τα ίδια όπως και στο βασικό μοντέλο. Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστούν οι ποσότητες και οι χρονικές στιγμές παραγγελίας για την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Η συνάρτηση κόστους δεν αλλάζει σε σχέση με το αρχικό μοντέλο. Η βασική διαφορά είναι ότι εδώ υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ των χρονικών στιγμών παραγγελίας και των χρονικών στιγμών άφιξης των παραγγελιών στην αποθήκη. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ιδιότητα μηδενικού αποθέματος συνεχίζει να ισχύει ως προς τις στιγμές άφιξης παραγγελίας, δηλαδή πρέπει οι νέες ποσότητες να φτάνουν στην αποθήκη ακριβώς τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται το απόθεμα. Αυτό στη γενική περίπτωση στοχαστικής ζήτησης ή χρόνου παράδοσης δεν είναι εφικτό, όμως στο συγκεκριμένο μοντέλο τόσο η ζήτηση όσο και ο χρόνος παράδοσης είναι απολύτως προβλέψιμα, επομένως οι παραγγελίες μπορούν να γίνονται σε χρονικές στιγμές τέτοιες ώστε οι νέες ποσότητες να φτάνουν στην αποθήκη όταν μηδενιστεί το απόθεμα.

Επειδή η ζήτηση είναι ίση με a ανά μονάδα χρόνου, τότε σε χρονικό διάστημα μήκους L η ποσότητα που θα πωληθεί είναι ίση με aL. Επομένως αν μια παραγγελία γίνει όταν το επίπεδο αποθέματος είναι ίσο με $R = aL$, τότε τη στιγμή άφιξης της παραγγελίας στην αποθήκη το απόθεμα θα έχει μόλις μηδενιστεί. Το επίπεδο R ονομάζεται σημείο αναπαραγγελίας (reorder point).

Όσον αφορά την ποσότητα παραγγελίας και το κόστος, είναι εύκολο να δούμε ότι αν οι παραγγελίες γίνονται σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα του reorder point $R = aL$, τότε η συνάρτηση κόστους είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του βασικού μοντέλου Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας και επομένως η βέλτιστη ποσότητα είναι η Q^* που δίνεται από την (11.2).

Επομένως η βέλτιστη πολιτική συνοψίζεται ως εξής: Όταν η στάθμη του αποθέματος πέσει στο επίπεδο $R = aL$ γίνεται παραγγελία μεγέθους $Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$. Πολιτικές που προσδιορίζονται από ένα ζεύγος ποσότητας παραγγελίας Q και επιπέδου αναπαραγγελίας R ονομάζονται πολιτικές τύπου (R, Q) και έχουν εφαρμογή και σε γενικότερα προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων με αβεβαιότητα. Στο παρόν πρόβλημα οι βέλτιστες παράμετροι R και Q προσδιορίζονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη, αλλά σε γενικότερα προβλήματα αυτό δεν ισχύει, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Σημειώνουμε επίσης ότι η πολιτική (R, Q) που περιγράψαμε εφαρμόζεται όταν $R \leq Q^*$, δηλαδή όταν η ποσότητα που φτάνει στην αποθήκη είναι μεγαλύτερη από το επίπεδο αναπαραγγελίας, δηλαδή ισοδύναμα αν το μήκος του κύκλου είναι $T \leq L$. Αν ο χρόνος καθυστέρησης είναι μεγαλύτερος από ένα κύκλο, τότε οι παραγγελίες θα πρέπει να γίνονται αρκετά νωρίτερα, έτσι ώστε να φτάνουν στο τέλος όχι του παρόντος αλλά κάποιου επόμενου κύκλου. Με αυτή την διόρθωση το επίπεδο αναπαραγγελίας R γενικεύεται κατάλληλα (βλ. Άσκηση ???).

11.4.2 Προγραμματισμένες Ελλείψεις

Θεωρούμε πάλι το βασικό μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με $L = 0$. Μια από τις υποθέσεις αυτού του μοντέλου είναι ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Επειδή η ζήτηση είναι ντετερμινιστική και οι παραλαβές γίνονται άμεσα, είναι εφικτό οι ελλείψεις να αποφεύγονται εντελώς. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις εφαρμογών στις οποίες είναι επιθυμητό ένα μέρος της ζήτησης να ικανοποιείται όχι άμεσα αλλά μέσω backlog, δηλαδή βάζοντας τους αντίστοιχους πελάτες σε εκκρεμότητα και κάνοντας την παράδοση όταν γίνει παραλαβή της νέας ποσότητας στην αρχή του επόμενου κύκλου. Το κίνητρο για τέτοιου τύπου πολιτικές είναι προφανώς η μείωση του κόστους αποθήκευσης, όμως από την άλλη πλευρά υπεισέρχεται ένα νέο κόστος που οφείλεται στο backlog και μπορεί να προέρχεται από το έμμεσο κόστος δυσαρέσκειας των πελατών που δεν λαμβάνουν το προϊόν αμέσως, από τα διαδικαστικά κόστη διαχείρισης των εκκρεμοτήτων κλπ. Υποθέτουμε ότι επιπλέον του κόστους παραγγελίας K και του κόστους αποθήκευσης h, υπάρχει και ένα κόστος ελλείψεων p ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου που αυτή η ποσότητα βρίσκεται σε εκκρεμότητα μέχρι να παραδοθεί στον πελάτη. Το κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους παραγγελιών, αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου. Επειδή το επίπεδο των ελλείψεων είναι μέρος της πολιτικής διαχείρισης του αποθέματος, το μοντέλο αυτό αναφέρεται ως Οικονομική Ποσότητα Παραγγελίας με Προγραμματισμένες Ελλείψεις (EOQ with Planned Shortages).

Στο μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις η πολιτική παραγγελιών προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους: την ποσότητα παραγγελίας Q και το ποσοστό της ζήτησης x που ικανοποιείται άμεσα από από το απόθεμα χωρίς να μπαίνει σε εκκρεμότητα. Επομένως στη διάρκεια ενός διαστήματος στο οποίο η συνολική ζήτηση είναι ίση με Q, η ποσότητα που ικανοποιείται από το ράφι είναι $S = Qx$ και η ποσότητα που ικανοποιείται μέσω εκκρεμοτήτων είναι $B = Q(1-x)$. Η πολιτική αυτή υλοποιείται ως εξής: Όταν μηδενιστεί το απόθεμα δεν γίνεται νέα παραγγελία, αλλά η ζήτηση που έρχεται μπαίνει σε εκκρεμότητα μέχρι τη στιγμή που το backlog να φτάσει το επίπεδο B. Τότε γίνεται παραγγελία ύψους Q η οποία έρχεται αμέσως. Από αυτή την ποσότητα ένα μέρος B δεν αποθηκεύεται αλλά αποστέλλεται αμέσως στους πελάτες που είναι σε εκκρεμότητα. Το υπόλοιπο μέρος S μπαίνει στην αποθήκη και χρησιμοποιείται για να ικανοποιεί τη ζήτηση μέχρι να εξαντληθεί, οπότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται εκ νέου.

Ορίζουμε και πάλι ως κύκλο το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών. Η διάρκεια ενός κύκλου είναι ίση με $T = Q/a$. Τώρα ο κύκλος διαιρείται σε δύο διαστήματα. Στο πρώτο διάστημα, μήκους S/a η ζήτηση ικανοποιείται από το απόθεμα. Στο δεύτερο διάστημα, μήκους B/a, η ζήτηση μπαίνει σε εκκρεμότητα και ικανοποιείται στο τέλος του κύκλου. Επομένως το απόθεμα μειώνεται γραμμικά στο πρώτο διάστημα από το επίπεδο S στο μηδέν με ρυθμό a, ενώ το backlog αυξάνεται γραμμικά στο δεύτερο διάστημα από το μηδέν στο επίπεδο B επίσης με ρυθμό a. Με βάση τα παραπάνω, το κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με

$$h\int_0^{S/a}(S-at)dt = h\left(S\frac{S}{a} - a\frac{(S/a)^2}{2}\right) = \frac{hS^2}{2a} = \frac{hQ^2x^2}{2a}.$$

Ομοίως, το κόστος έλλειψης σε έναν κύκλο είναι

$$p\int_0^{B/a} atdt = pa\frac{B^2}{2a^2} = \frac{pB^2}{2a} = \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}.$$

Επομένως το συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με

$$K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a},$$

και το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου

$$C(Q,x) = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g(x)Q}{2},$$

όπου

$$g(x) = hx^2 + p(1-x)^2.$$

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ ισχύει $g(1) = h$ και επομένως η $C(Q,1)$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση κόστους στο βασικό μοντέλο χωρίς ελλείψεις.

Για να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές των Q, x παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του Q, η $C(Q, x)$ ελαχιστοποιείται ως προς x αν και μόνο αν ελαχιστοποιείται η $g(x)$. Επειδή η $g(x)$ είναι κυρτή ως προς x, ελαχιστοποείται όταν $g'(x) = 0$, από την οποία προκύπτει αμέσως ότι η βέλτιστη τιμή του x είναι

$$x^* = \frac{p}{h+p} \tag{11.3}$$

και η ελάχιστη τιμή της $g(x)$

$$g^* = g(x^*) = \frac{hp}{h+p}.$$

Αντικαθιστώντας την $g(x)$ με τη βέλτιστη τιμή g^* στη συνάρτηση κόστους, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$\tilde{C}(Q) = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g^*Q}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει αντίστοιχη μορφή με τη συνάρτησης κόστους στην (11.1) με μοναδιαίαο κόστος αποθήκευσης g^*. Επομένως η βέλτιστη λύση είναι

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{g^*}} = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} \tag{11.4}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι κάτω από τη βέλτιστη πολιτική η διάρκεια του κύκλου είναι

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{2K}{ah}\sqrt{\frac{p+h}{p}},$$

η μέγιστη τιμή του αποθέματος

$$S^* = Q^*x^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}},$$

η μέγιστη τιμή του backlog

$$\mathrm{B}^* = Q^*(1 - x^*) = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

και η ελάχιστη τιμή του κόστους ανά μονάδα χρόνου

$$C^* = C(Q^*, x^*) = \tilde{C}(Q^*) = \sqrt{2Kag^*} = \sqrt{\frac{2aKhp}{p+h}}.$$

Συνοψίζοντας, η βέλτιστη πολιτική είναι να γίνονται παραγγελίες ύψους Q^* όταν η στάθμη του backlog φτάσει την τιμή B^*. Παρατηρούμε ότι

$$S^* < \sqrt{\frac{2aK}{h}} < Q^*$$

επομένως η ποσότητα παραγγελίας είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση που δεν επιτρέπονται ελλείψεις, ενώ η ποσότητα που αποθηκεύεται είναι μικρότερη. Επίσης

$$C^* < \sqrt{2aKh}$$

επομένως με τις προγραμματισμένες ελλείψεις επιτυγχάνεται μείωση του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, παρ' όλο που έχει προστεθεί και η νέα συνιστώσα του κόστους ελλείψεων. Αυτό συμβαίνει επειδή όταν επιτρέπονται οι ελλείψεις επιτυγχάνεται ένας καλύτερος συνδυασμός αποθέματος και backlog από ότι αν όλη η παραγγελία έμπαινε στο απόθεμα.

11.5 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας στο οποίο υποθέτουμε ότι η ποσότητα παραγγελίας είναι ίση με $Q = \theta Q^*$. Να αποδειχθεί ότι το μέσο κόστος κάτω από αυτή την πολιτική είναι ίσο με
$$C(Q) = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)C^*.$$

2. Ένα κατάστημα εμπορεύεται ένα προϊόν του οποίου η ζήτηση είναι σταθερή και ίση με a ανά μονάδα χρόνου. Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με K και το κόστος αγοράς του προϊόντος από τον προμηθευτή είναι ίσο με c ανά μονάδα. Το κόστος αποθήκευσης είναι ίσο με h ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Ένας δεύτερος προμηθευτής που πωλεί το ίδιο προϊόν χρεώνει τιμή μονάδας $c' < c$ όμως δεν δέχεται πάνω από N παραγγελίες ανά μονάδα χρόνου. Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε να συμφέρει η μετάβαση στο δεύτερο προμηθευτή (τα κόστη K και h είναι τα ίδια και για τους δύο προμηθευτές).

3. Σε ένα σύστημα παραγωγής ένα συγκεκριμένο προϊόν διακινείται από δύο αποθήκες απομακρυσμένες μεταξύ τους. Η ζήτηση του προϊόντος είναι γνωστή και σταθερή και ίση με a_1 και a_2 ανά μονάδα χρόνου στις αποθήκες 1 και 2 αντίστοιχα. Το προϊόν έχει σταθερό κόστος παραγγελίας K και κόστος αποθήκευσης h ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου, κοινά και στις δύο αποθήκες. Οι παραγγελίες για νέες ποσότητες γίνονται χωριστά σε κάθε αποθήκη και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Στο σύστημα αυτό εξετάζεται το ενδεχόμενο οι αποθήκες να συγχωνευθούν σε μία στη θέση 1, όλες οι παραγγελίες να γίνονται από την αποθήκη 1 και η ζήτηση της αποθήκης 2 να μεταφέρεται απευθείας στους πελάτες από την 1 με κόστος d ανά μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί η περιοχή τιμών του κόστους d έτσι ώστε να συμφέρει η συγχώνευση.

4. Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με ζήτηση a ανά μονάδα χρόνου και χρόνο καθυστέρησης στην παράδοση νέας παραγγελίας ίσο με L. Έστω ότι μια πολιτική διαχείρισης αποθέματος με ποσότητα παραγγελίας Q και μήκος κύκλου $T = Q/a$. Να αποδειχθεί ότι αν $L > T$ ή ισοδύναμα $aL > Q$, τότε το επίπεδο αναπαραγγελίας R κάτω από αυτή την πολιτική είναι ίσο με
$$R = a\left(L - T\left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor\right) = aL - Q\left\lfloor \frac{aL}{Q} \right\rfloor.$$

5. Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με προγραμματισμένες ελλείψεις και υποθέτουμε ότι υπάρχει χρόνος καθυστέρησης της παραγγελίας ίσος με L, όπου $L < T^*$. Να αποδειχθεί ότι η βέλτιστη πολιτική δεν αλλάζει και να προσδιοριστεί το επίπεδο αναπαραγγελίας.

6. Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με προγραμματισμένες ελλείψεις και υποθέτουμε ότι η ζήτηση που φτάνει όταν δεν υπάρχει προϊόν στην αποθήκη δεν μπαίνει σε εκκρεμότητα αλλά χάνεται. Το κόστος ανά μονάδα χαμένης ζήτησης είναι ίσο με b. Έστω ότι μια πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων αυτού του τύπου υλοποιείται ως εξής: Μια ποσότητα παραγγελίας που φτάνει στην αποθήκη χρησιμοποιείται για την ικανοποίηση της ζήτησης μέχρι το απόθεμα να εξαντληθεί. Μετά την εξάντληση του αποθέματος μεσολαβεί ένα διάστημα t_0 στη διάρκεια του οποίου η ζήτηση που έρχεται δεν ικανοποιείται. Στο τέλος αυτού του διαστήματος γίνεται μια νέα παραγγελία ύψους Q που φτάνει στην αποθήκη αμέσως και όλη η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Έστω ότι μια πολιτική αυτής της μορφής προσδιορίζεται από την ποσότητα παραγγελίας Q και το ποσοστό x της ζήτησης που ικανοποιείται.

   (α) Να υπολογιστεί η τιμή του t_0 και το μήκος κύκλου κάτω από την πολιτική (Q, x).

(β) Να δειχθεί ότι το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου κάτω από την πολιτική (Q, x) είναι ίσο με

$$C(Q, x) = \left[aKQ + ac + \frac{hQ}{2}\right]x + ba(1 - x).$$

(γ) Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική. Ποια είναι η οικονομική ερμηνεία της;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

12.1 Εισαγωγή

Ο κυριότερος περιορισμός στα μοντέλα της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι η υπόθεση ότι η ζήτηση είναι γνωστή και δεν παρουσιάζει διακυμάνσεις. Η υπόθεση αυτή είναι ρεαλιστική σε κάποιες περιπτώσεις (π.χ. όταν υπάρχουν συγκεκριμένες παραγγελίες από τους πελάτες για το επόμενο χρονικό διάστημα), όμως στην πραγματικότητα στα περισσότερα προβλήματα οργάνωσης παραγωγής και διαχείρισης αποθεμάτων υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά πολλές ποσότητες, αλλά κυρίως τη ζήτηση.

Τα μοντέλα που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο γενικεύουν το μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας στην κατεύθυνση της στοχαστικής ζήτησης. Θεωρούμε και πάλι τη διαχείριση παραγγελιών και αποθήκευσης ενός προϊόντος με στοχαστική ζήτηση. Υποθέτουμε γενικά ότι η ζήτηση ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία $\{D(t), t \geq 0\}$, όπου $D(t)$ η συνολική ζήτηση στο διάστημα $[0, t]$. Κάτω από αυτό το γενικό μοντέλο είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις κόστους και για τις βέλτιστες πολιτικές παραγγελιών. Για το λόγο αυτό γίνονται συνήθως συγκεκριμένες υποθέσεις ως προς τη δομή της στοχαστικής διαδικασίας ζήτησης και αναζητούνται οι βέλτιστες πολιτικές κάτω από αυτές τις υποθέσεις.

Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ο χρόνος καθυστέρησης παράδοσης L είναι γενικά μη μηδενικός, είναι όμως γνωστός και σταθερός. Η παρακολούθηση του αποθέματος μπορεί να είναι συνεχής ή περιοδική.

Πριν προχωρήσουμε στις κατηγορίες πολιτικών παραγγελιών, θα συζητήσουμε μια επέκταση του ορισμού του αποθέματος που διευκολύνει την ανάλυση. Συγκεκριμένα, όταν η ζήτηση είναι στοχαστική και ο χρόνος παράδοσης L μη μηδενικός, μια πολιτική που βασίζεται σε επίπεδο αναπαραγγελίας έχει πρόβλημα στην υλοποίηση αν χρησιμοποιεί τη στάθμη του αποθέματος για να κάνει τις παραγγελίες. Αυτό συμβαίνει επειδή έτσι δεν λαμβάνονται υπόψη παραγγελίες που έχουν γίνει προηγουμένως και δεν έχουν παραδοθεί ακόμη στην αποθήκη, όπως επίσης και τυχόν εκκρεμότητες προς τους πελάτες δηλαδή το επίπεδο του backlog. Η πληροφορία για αυτά τα μεγέθη πρέπει να συνυπολογιστεί όταν λαμβάνεται η απόφαση για την τέλεση ή όχι μιας παραγγελίας. Για να ορίσουμε με σαφήνεια τις πολιτικές παραγγελιών και να μελετήσουμε αναλυτικά τα σχετικά μοντέλα διαχείρισης αποθέματος, ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

- $I(t)$: ποσότητα προϊόντος στην αποθήκη (stock-on-hand) τη χρονική στιγμή t.
- $B(t)$: ποσότητα προϊόντος σε εκκρεμότητα προς τους πελάτες (backlog) τη χρονική στιγμή t.
- $IO(t)$: ποσότητα προϊόντος που βρίσκεται καθ' οδόν προς την αποθήκη από προηγούμενες παραγγελίες (incoming orders) τη χρονική στιγμή t.
- $IL(t) = I(t) - B(t)$: επίπεδο αποθέματος (inventory level) τη χρονική στιγμή t.
- $IP(t) = I(t) - B(t) + IO(t) = IL(t) + IO(t)$: θέση αποθέματος (inventory position) τη χρονική στιγμή t.

Οι ποσότητες $I(t), B(t), IO(t)$ είναι μη αρνητικές, ενώ οι $IL(t)$ και $IP(t)$ μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές. Επίσης, επειδή κατά κανόνα δεν υπάρχουν ταυτόχρονα προϊόν στην αποθήκη και εκκρεμότητες προς τους πελάτες, ισχύει $I(t)B(t) = 0$ για $t \geq 0$, και επομένως $I(t) = \max(IL(t), 0)$ και $B(t) = -\min(IL(t), 0)$. Η θέση αποθέματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη ποσότητα, καθώς δίνει πληροφορία όχι μόνο για την ποσότητα προϊόντος στην αποθήκη αλλά και για τις μελλοντικές υποχρεώσεις προς τους πελάτες όπως επίσης και για τις μελλοντικές ποσότητες που αναμένονται. Οι πολιτικές παραγγελιών που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο βασίζονται στη θέση αποθέματος για να ορίσουν πότε πρέπει να γίνονται παραγγελίες. Στην ειδική περίπτωση όπου $L = 0$, οπότε οι παραγγελίες φτάνουν άμεσα, ισχύει $IO(t) = 0$ και $IP(t) = IL(t)$, για $t \geq 0$.

Όσον αφορά τις πολιτικές παραγγελιών, θα εξετάσουμε δύο βασικές κατηγορίες, που αφενός διευκολύνουν αρκετά την ανάλυση και αφετέρου είναι οι πιο συνηθισμένες σε πρακτικές εφαρμογές. Αυτές είναι οι κλάσεις πολιτικών (R, Q) και (s, S).

Σε μια πολιτική παραγγελιών της κλάσης (R, Q) οι παραγγελίες γίνονται πάντα σε πολλαπλάσια της ποσότητας Q. Συγκεκριμένα, όταν η θέση αποθέματος πέσει στο επίπεδο R ή κάτω από αυτό γίνεται παραγγελία του ελάχιστου πολλαπλάσιου της ποσότητας Q που θα επαναφέρει τη θέση αποθέματος σε μια τιμή αυστηρά μεγαλύτερη του R. Επομένως αν τη χρονική στιγμή t ισχύει $IP(t) \leq R$, τότε γίνεται παραγγελία ύψους nQ όπου $n = \min\{k \in \mathbb{N} : IP(t) + kQ > R\}$.

Σε μια πολιτική παραγγελιών της κλάσης (s, S) η ποσότητα παραγγελίας προσδιορίζεται έτσι ώστε η θέση αποθέματος να επανέλθει σε ένα καθορισμένο επίπεδο. Συγκεκριμένα, όταν η θέση αποθέματος πέσει στο επίπεδο s ή κάτω από αυτό γίνεται παραγγελία τόσης ποσότητας έτσι ώστε η θέση αποθέματος να επανέλθει στη θέση S. Επομένως αν τη χρονική στιγμή t ισχύει $IP(t) \leq R$, τότε γίνεται παραγγελία ύψους $S - IP(t)$.

Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε ορισμένα βασικά στοχαστικά μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων με αβεβαιότητα στη ζήτηση. Θα εξετάσουμε πρώτα ένα μοντέλο με συνεχή παρακολούθηση του αποθέματος στο οποίο εφαρμόζεται μια πολιτική τύπου (Q, R). Στη συνέχεια θα εστιάσουμε στην περίπτωση της περιοδικής παρακολούθησης, όπου θα μελετήσουμε αρχικά ένα μοντέλο μιας περιόδου (πρόβλημα του εφημεριδοπώλη) και στη συνέχεια το γενικότερο πρόβλημα πολλών περιόδων, στο οποίο εφαρμόζονται πολιτικές τύπου (s, S).

12.2 Το Μοντέλο (Q, R) Συνεχούς Επιθεώρησης Αποθέματος

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων με συνεχή παρακολούθηση και στοχαστική ζήτηση, στο οποίο εφαρμόζεται πολιτική τύπου (Q, R). Υπάρχει σταθερό κόστος παραγγελίας K, κόστος προϊόντος c ανά μονάδα, και κόστη αποθήκευσης και ελλείψεων h και p, αντίστοιχα, ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Ο χρόνος καθυστέρησης είναι σταθερός και ίσος με L. Η ζήτηση ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με σταθερή μέση τιμή a ανά μονάδα χρόνου.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η πιο άμεση επέκταση του μοντέλου Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας στην περίπτωση της στοχαστικής ζήτησης, όμως η ανάλυση εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μορφή της στοχαστικής διαδικασίας της ζήτησης. Θα δούμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η ζήτηση ακολουθεί μια διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό a. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε μια γενική στοχαστική διαδικασία και μελετάμε μια προσέγγιση της βέλτιστης πολιτικής κάτω από μια απλοποιητική παραδοχή ως προς το κόστος ελλείψεων.

12.2.1 Το Μοντέλο (Q, R) με διαδικασία ζήτησης Poisson

Έστω ότι η ζήτηση φτάνει σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων Poisson $\{D(t), t \geq 0\}$, με ρυθμό a μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου. Κάθε άφιξη αντιστοιχεί σε μια μονάδα προϊόντος. Έστω $D(t, u] = D(u) - D(t)$ η ζήτηση στο διάστημα $(t, u]$. Η $D(t, u]$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $a(u - t)$. Η πολιτική παραγγελιών είναι της κατηγορίας (Q, R), όπου η ποσότητα Παραγγελίας Q και το επίπεδο αναπαραγγελίας R είναι ακέραιες παράμετροι. Το πρόβλημα είναι να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές των Q, R που ελαχιστοποιούν το αναμενόμενο μέσο κόστος παραγγελίας, αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα $C(Q, R)$.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους $C(Q, R)$ έχουμε ότι το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου αποτελείται από 4 μέρη: το σταθερό κόστος παραγγελίας, το κόστος αγοράς/παραγωγής του προϊόντος, το κόστος αποθήκευσης και το κόστος ελλείψεων. Το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου που οφείλεται στο σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με $\frac{Ka}{Q}$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αφού η ποσότητα κάθε παραγγελίας είναι ίση με Q, ο μέσος αριθμός παραγγελιών ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με $\frac{a}{Q}$. Το μέσο κόστος αγοράς ή παραγωγής του προϊόντος είναι ίσο με a, επειδή η μέση ποσότητα που παράγεται η αγοράζεται ανά μονάδα χρόνου είναι ίση με τη μέση ζήτηση a. Αυτό συμβαίνει επειδή σε μεγάλο χρονικό διάστημα όλη η ζήτηση των πελατών ικανοποιείται (είτε απευθείας από το απόθεμα είτε μέσω backlog), ενώ οι μόνες ποσότητες που αγοράζονται ή παράγονται είναι αυτές που προορίζονται να ικανοποιήσουν τη ζήτηση. Το μέσο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με

$$h \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{t=0}^{T} I(t)dt}{T}.$$

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία του αποθέματος $\{I(t), t \geq 0\}$. Θα δείξουμε παρακάτω ότι η διαδικασία έχει στάσιμη κατανομή και έστω I μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή. Τότε το μέσο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με $hE(I)$. Όμοια προκύπτει ότι το μέσο κόστος ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με $pE(B)$, όπου B μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας $\{B(t), t \geq 0\}$.

Με βάση τα παραπάνω η συνάρτηση κόστους $C(Q, R)$ γράφεται ως εξής:

$$C(Q, R) = \frac{Ka}{Q} + ca + hE[I] + pE[B]. \tag{12.1}$$

Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μέσου κόστους, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι οι περιοχές τιμών των μεταβλητών είναι $Q \geq 1$ και $R \geq -Q$ και ακέραιες. Η πρώτη ανισότητα είναι προφανής επειδή η ποσότητα παραγγελίας πρέπει να είναι θετική. Όσον αφορά το επίπεδο αναπαραγγελίας R, αυτό μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές, δηλαδή νέες παραγγελίες να γίνονται μόνο όταν συγκεντρωθούν αρκετές εκκρεμότητες προς τους πελάτες (αντίστοιχες πολιτικές εφαρμόζονται και στο μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις του προηγούμενου κεφαλαίου). Όμως μια πολιτική με τιμή $R < -Q$ δεν μπορεί να είναι βέλτιστη, επειδή η θέση αποθέματος θα παίρνει μέγιστη τιμή $R + Q < 0$, δηλαδή θα παραμένει πάντα αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι το απόθεμα θα είναι πάντα μηδενικό, ενώ θα υπάρχει ένα μόνιμο μη μηδενικό επίπεδο ελλείψεων. Αν θεωρήσουμε μια άλλη πολιτική με την ίδια τιμή του Q και επίπεδο αναπαραγγελίας $R' = -Q$, τότε το επίπεδο αποθέματος παραμένει μηδενικό, και τα κόστη παραγγελίας και αποθήκευσης δεν επηρεάζονται, ενώ το μέσο επίπεδο ελλείψεων μειώνεται με αποτέλεσμα τη μείωση του κόστους.

Επομένως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους γράφεται ως

$$C^* = \inf_{Q\geq 1, R\geq -Q} C(Q, R) \tag{12.2}$$

Στα επόμενα βήματα θα υπολογίσουμε μια έκφραση για τη συνάρτηση κόστους και με βάση αυτήν θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο για την ελαχιστοποίηση. Για τον υπολογισμό των $E(I)$ και $E(B)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα. Πρώτα θα δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{IP(t), t \geq 0\}$ της θέσης αποθέματος είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, της οποίας η στάσιμη κατανομή έχει απλή μορφή. Μέσω αυτής θα υπολογιστούν οι στάσιμες κατανομές των διαδικασιών $\{\mathrm{I}(t)\}$ και $\{B(t)\}$.

Εξετάζουμε τη διαδιακασία $\{IP(t), t \geq 0\}$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο όλων των ακεραίων, επειδή τουλάχιστον αρχικά η θέση αποθέματος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ανάλογα με τις τιμές του αποθέματος, του backlog και των εισερχόμενων ποσοτήτων τη στιγμή $t = 0$. Για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση όμως, μετά από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα θα γίνει η πρώτη παραγγελία και από τη στιγμή αυτή και μετά η διαδικασία μεταβάλλεται ως εξής: Η θέση αποθέματος μειώνεται κατά μια μονάδα σε κάθε χρονική στιγμή άφιξης της ζήτησης, εκτός από τις στιγμές άφιξης t στις οποίες ισχύει $IP(t^-) = R + 1$. Σε αυτές τις περιπτώσεις τη στιγμή t γίνεται μια παραγγελία μεγέθους Q. Παρ' όλο που αυτή η ποσότητα θα έρθει στην αποθήκη τη χρονική στιγμή $t + L$, κατά τη χρονική στιγμή t προστίθεται στις εισερχόμενες ποσότητες $IO(t)$ και στη θέση αποθέματος $IP(t)$, επομένως η θέση αποθέματος παίρνει αμέσως την τιμή $R+Q$. Σε όλες τις περιπτώσεις οι αλλαγές κατάστασης της $\{IP(t)\}$) συμβαίνουν αποκλειστικά στις στιγμές άφιξης της ζήτησης, επομένως όλοι οι θετικοί ρυθμοί μετάβασης είναι ίσοι με a.

Με βάση τα παραπάνω, η θέση αποθέματος μεταβάλλεται σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Συνεχούς Χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathbb{Z}$, η οποία έχει μια θετικά επαναληπτική (εργοδική) κλάση $\{R + 1, R + 2, \dots, R + Q\}$ ενώ όλες οι άλλες καταστάσεις είναι παροδικές. Οι ρυθμοί μετάβασης μέσα στην εργοδική κλάση είναι ίσοι με

$$q_{ij} = \begin{cases} a, & i = R + 2, \dots, R + Q, j = i - 1 \\ a, & i = R + 1, j = R + Q \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επομένως, μετά την πρώτη είσοδό της στην εργοδική κλάση, η θέση αποθέματος μεταβάλλεται κυκλικά μεταξύ των τιμών $R + Q, R + Q - 1, \dots, R + 1$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή της διαδικασίας της θέσης αποθέματος. Οι παροδικές καταστάσεις έχουν στάσιμη πιθανότητα ίση με μηδέν. Για τις καταστάσεις $R + 1, R + 2, \dots, R + Q$ οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} p_{R+1}a &= p_{R+2}a \\ p_{R+2}a &= p_{R+3}a \\ &\dots \\ p_{R+Q}a &= p_{R+1}a \end{aligned}$$

με εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{i=R+1}^{R+Q} p_i = 1$. Βλέπουμε εύκολα ότι η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας θέσης αποθέματος είναι $p_i = \frac{1}{Q}, i = R + 1, \dots, R + Q$, δηλαδή η διακριτή ομοιόμορφη. Αυτό σημαίνει ότι τα ποσοστά χρόνου που η θέση αποθέματος βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $R + 1, \dots, R + Q$ σε στάσιμη κατάσταση είναι ίσα.

Για τον υπολογισμό του μέσου κόστους σε μεγάλο ορίζοντα χρειαζόμαστε επίσης τη στάσιμη κατανομή των διαδικασιών αποθέματος $\{I(t)\}$ και backlog $\{B(t\}$. Αυτές μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από τη στάσιμη κατανομή της $\{IP(t)\}$, χρησιμοποιώντας μια σχέση που υπάρχει μεταξύ αυτών των ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο χρονικές στιγμές t και $t + L$, που διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα χρόνο παράδοσης L. Το επίπεδο αποθέματος $IL(t + L)$ τη χρονική στιγμή $t + L$ προκύπτει από το αντίστοιχο επίπεδο αποθέματος $IL(t)$ τη στιγμή t, προσαυξημένο με τις εισερχόμενες ποσότητες που έφτασαν στην αποθήκη στο ενδιάμεσο διάστημα $(t, t + L]$, και μειωμένο κατά τη νέα ζήτηση που προέκυψε στο ίδιο διάστημα. Όμως οι ποσότητες που παραλήφθηκαν είναι ακριβώς αυτές που βρίσκονταν σε διαδικασία παραλαβής κατά τη χρονική στιγμή t. Πράγματι, αφού ο χρόνος παράδοσης είναι L, όσες ποσότητες ήταν εισερχόμενες τη στιγμή t σίγουρα έφτασαν μέσα στο επόμενο διάστημα μήκους L. Από την άλλη πλευρά, όσες ποσότητες ενδεχομένως παραγγέλθηκαν στο διάστημα $(t, t + L]$ σίγουρα δεν έχουν φτάσει στην αποθήκη τη στιγμή $t + L$. Επομένως ισχύει η σχέση

$$IL(t + L) = IL(t) + IO(t) - D(t, t + L] = IP(t) - D(t, t + L].$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε t, επομένως και για την οριακή κατανομή όταν $t \to \infty$. Επομένως αν θεωρήσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές IP, IL που ακολουθούν τη στάσιμη κατανομή των $\{IP(t)\}$ και $\{IL(t)\}$, αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$IL = IP - D, \tag{12.3}$$

όπου η IP ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $R + 1, \ldots, R + Q$ και η D ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή aL, ανεξάρτητη της IP.

Από την (12.3) και την κατανομή των IP, D μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές $E(I), E(B)$ στην (12.1). Για την E(B), από τη σχέση $B(t) = \max(-IL(t), 0)$ παίρνουμε $E[B] = E[\max(D - IP, 0)]$. Δεσμεύοντας ως προς την τιμή της IP προκύπτει:

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} E[\max(D - s, 0)].$$

Η ποσότητα $G(s) = E[\max(D - s, 0)]$ ονομάζεται συνάρτηση απώλειας πρώτης τάξης της D και συμβολίζει την μέση υπέρβαση της τιμής της D πάνω από το επίπεδο s (η ονομασία συνάρτηση απώλειας προέρχεται από τον αναλογισμό, όπου επίσης ονομάζεται και συνάρτηση υπερβάλλοντος ζημίας, και εκφράζει τη μέση απώλεια ενός ασφαλισμένου του οποίου η ασφάλεια καλύπτει πλήρως ζημιές μέχρι το ποσό s και ενδεχόμενο υπερβάλλον ποσό το πληρώνει ο ίδιος). Στο πρόβλημα που μελετάμε, η $G(s)$ εκφράζει το μέσο επίπεδο του backlog σε στάσιμη κατάσταση, όταν η θέση αποθέματος παραμένει σταθερή $IP = s$. Παρατηρούμε ότι μια πολιτική (Q, R) με $R = s - 1$ και $Q = 1$, αντιστοιχεί σε τιμή $IP(t) = s$ για $t \geq 0$. Μια τέτοια πολιτική κάνει παραγγελίες μιας μονάδας κάθε φορά που έρχεται μια ζήτηση. Πολιτικές αυτού του τύπου ονομάζονται πολιτικές αποθέματος βάσης (base-stock policies).

Τώρα θα υπολογίσουμε την $G(s)$ για ακέραιες τιμές του s που επιτρέπουμε να είναι και αρνητικές. Μια πολιτική αποθέματος βάσης με $s < 0$ αντιστοιχεί σε πολιτική (Q, R) με $Q = 1, R = s - 1 < -1$ και όπως είδαμε προηγουμένως δε μπορεί να είναι βέλτιστη. Όμως αυτές οι τιμές της $G(s)$ χρειάζονται για τον υπολογισμό της βέλτιστης πολιτικής στη γενική περίπτωση πολιτικών (Q, R). Αν $s < 0$, επειδή η $D \geq 0$, ισχύει $\max(D - s, 0) = D - s$, επομένως $G(s) = E[D] - s = aL - s$, επειδή η D ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο aL.

Θεωρούμε κατόπι την περίπτωση $s \geq 0$. Η $\max(D - s, 0)$ είναι μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, επομένως η μέση τιμή της μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$E[\max(D - s, 0)] = \sum_{k=0}^{\infty} P[\max(D - s, 0) > k] = \sum_{k=0}^{\infty} P[D - s > k] = \sum_{k=0}^{\infty} P[D > s + k] = \sum_{j=s}^{\infty} P[D > j].$$

Όμως επειδή και η D είναι μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, ισχύει επίσης ότι $E[D] = \sum_{j=0}^{\infty} P[D > j]$, επομένως

$$G(s) = E[D] - \sum_{j=0}^{s-1} P(D > j) = aL - \sum_{j=0}^{s-1} (1 - F(j)) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j),$$

όπου $F(j) = P[D \leq j] = \sum_{k=0}^{j} e^{-aL} \frac{(aL)^j}{j!}$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $D \sim \text{Poisson}(aL)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τη σύμβαση για το κενό άθροισμα $\sum_{j=0}^{m} a_j = 0$ για $m < 0$, παίρνουμε ότι για όλες τις ακέραιες τιμές του s η μέση τιμή του backlog για την πολιτική αποθέματος βάσης s είναι

$$\bar{B}(s) = G(s) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j), \tag{12.4}$$

και για μια γενική πολιτική (Q, R)

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{B}(s). \tag{12.5}$$

Αντίστοιχα μπορεί να υπολογιστεί και η μέση τιμή του αποθέματος $E[I]$. Έχουμε ότι

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{I}(s),$$

όπου $\bar{I}(s) = E[\max(s - D, 0)]$ η μέση τιμή του αποθέματος κάτω από την πολιτική αποθέματος βάσης s. Από τη σχέση $IL(t) = I(t) - B(t)$, παίρνουμε

$$\bar{I}(s) = E[IL] + \bar{B}(s).$$

Επιπλέον από την (12.3) προκύπτει $E[IL] = E[IP] - E[D]$. Όμως για την πολιτική αποθέματος βάσης s ισχύει $IP = s$, επομένως

$$\bar{I}(s) = s - aL + \bar{B}(s) = \sum_{j=0}^{s-1} F(j) \tag{12.6}$$

και

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{I}(s). \tag{12.7}$$

Έχοντας υπολογίσει τις μέσες τιμές $E[B]$ και $E[S]$, επιστρέφουμε στη συνάρτηση κόστους (12.1), που τώρα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$C(Q, R) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)\right),$$

όπου

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h + p) \sum_{j=0}^{s-1} F(j). \tag{12.8}$$

Η ποσότητα $C(s)$ είναι το μέσο κόστος αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα, κάτω από την πολιτική αποθέματος βάσης s.

Όσον αφορά τη βέλτιστη πολιτική (Q, R), οι $\bar{I}(s)$, $\bar{B}(s)$ και επομένως και η συνάρτηση κόστους $C(Q, R)$ δεν έχουν αναλυτικές εκφράσεις. Αντίθετα θα δείξουμε κάποιες δομικές ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής που επιτρέπουν την κατασκευή ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου για τον προσδιορισμό της.

Με βάση τα παραπάνω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $C(Q, R)$ μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων εξής:

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R) = \inf_{Q \geq 1} C^*(Q) \tag{12.9}$$

όπου

$$C^*(Q) = \inf_{R \geq -Q} C(Q, R) = ca + \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{Q} \inf_{R \geq -Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s).$$

Θεωρούμε το πρόβλημα του δεύτερου σταδίου $C^*(Q)$. Από την (12.8) προκύπτει ότι η $C(s)$ είναι κυρτή συνάρτηση του s. Πράγματι, επειδή $F(s) = 0$ για $s < 0$, προκύπτει ότι για όλες τις ακέραιες τιμές του s

$$C(s + 1) - C(s) = -p + (h + p)F(s),$$

που είναι αύξουσα ως προς s. Επιπλέον η $C(s)$ ελαχιστοποιείται για $s = s^*$, όπου

$$s^* = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{p}{h+p}\right\}. \tag{12.10}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $0 \leq s^* \leq s_0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για οποιοδήποτε Q το άθροισμα $\sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)$ έχει ελάχιστη τιμή ως προς $R \geq -Q$ και οι όροι του ελάχιστου αθροίσματος είναι οι Q κατά σειρά μικρότερες τιμές της $C(s)$, έστω $C_{(1)}, C_{(2)}, \dots, C_{(Q)}$, οι οποίες προκύπτουν όταν το s μεταβάλλεται μέσα σε ένα διάστημα ακεραίων $\{R^*(Q)+1, \dots, R^*(Q)+Q\}$ (όχι απαραίτητα με αυτή τη σειρά). Επομένως

$$C^*(Q) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)}\right) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{s=R^*(Q)+1}^{R^*(Q)+Q} C(s)\right). \tag{12.11}$$

Το $R^*(Q)$ είναι το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας όταν η ποσότητα παραγγελίας είναι ίση με Q. Μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το παρακάτω αναδρομικό σχήμα για $Q = 1, 2, \dots$

1. Για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* - 1$.
2. Έστω $R^*(Q)$ η βέλτιστη τιμή του R για Q. Τότε οι $C(R^*(Q)+1), \dots, C(R^*(Q)+Q)$ είναι οι Q ελάχιστες τιμές της $C(s)$, $s \in \mathbb{Z}$. Για $Q+1$, λόγω της κυρτότητας της $C(s)$, η επόμενη αμέσως μεγαλύτερη τιμή της $C(s)$ θα είναι μια από τις $C(R^*(Q))$ και $C(R^*(Q)+Q+1)$. Στην πρώτη περίπτωση το επίπεδο αναπαραγγελίας θα μειωθεί κατά μια μονάδα, ενώ στη δεύτερη θα παραμείνει το ίδιο όπως πριν. Συγκεκριμένα,

$$R^*(Q+1) = \begin{cases} R^*(Q) - 1, & \text{αν } C(R^*(Q)) \leq C(R^*(Q)+Q+1) \\ R^*(Q), & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι το επίπεδο αναπαραγγελίας είναι φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q. Επειδή όμως για κάθε αύξηση του Q κατά μια μονάδα το $R^*(Q)$ μειώνεται κατά μια μονάδα ή παραμένει το ίδιο, ενώ για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* > -1$, βλέπουμε ότι $R^*(Q) \geq -Q$ για κάθε τιμή του Q.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρώτο στάδιο βελτιστοποίησης στην (12.9), δηλαδή στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $C^*(Q)$. Παίρνουμε τις διαφορές $C^*(Q+1) - C^*(Q)$ και αντικαθιστώντας από την (12.11) έχουμε

$$C^*(Q+1) - C^*(Q) = \frac{w(Q) - Ka}{Q(Q+1)},$$

όπου

$$w(Q) = QC_{(Q+1)} - \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)} = \sum_{j=1}^{Q}(C_{(Q+1)} - C_{(j)}). \tag{12.12}$$

Παρατηρούμε ότι

$$w(Q+1) - w(Q) = (Q+1)(C_{(Q+2)} - C_{(Q+1)})$$

και επειδή η $C_{(j)}$ είναι αύξουσα ως προς j, προκύπτει ότι και η $w(Q)$ είναι αύξουσα ως προς Q. Επομένως αν $C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0$ για κάποιο Q, τότε $C^*(Q'+1) - C^*(Q') > 0$ για κάθε $Q' \geq Q$. Συνεπώς η βέλτιστη τιμή του Q είναι η μικρότερη τιμή για την οποία η διαφορά γίνεται θετική:

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} = \inf\{Q \geq 1 : w(Q) > Ka\}. \tag{12.13}$$

Παράδειγμα 12.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων για ένα προϊόν του οποίου η ζήτηση ακολουθεί διαδικασία Poisson με ρυθμό $a = 3$ μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου, χρόνο καθυστέρησης παραγγελίας $L = 2$, σταθερό κόστος παραγγελίας $K = 2$ και κόστη αποθήκευσης και ελλείψεων $h = 1$ και $p = 2$, αντίστοιχα, ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη πολιτική τύπου (Q, R).*

Υπολογίζουμε πρώτα τη βέλτιστη πολιτική αποθέματος βάσης s^* από την (12.10), και έχουμε

$$s^* = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{p}{h+p}\right\} = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{2}{3}\right\},$$

όπου $F(s)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Poisson με παράμετρο $aL = 6$. Υπολογίζοντας τις τιμές της $F(s)$ παίρνουμε $F(6) = 0.606$ και $F(7) = 0.744$. Επομένως $s^* = 7$. Από την (12.8) υπολογίζουμε τη συνάρτηση κόστους για πολιτικές αποθέματος βάσης $C(s)$, για τιμές του $s = 2, 3, \ldots, 10$ όπως φαίνεται στον Πίνακα 12.1.

Πίνακας 12.1: Πίνακας τιμών της συνάρτησης κόστους $C(s)$

s	$C(s)$
2	8.06
3	6.25
4	4.70
5	3.55
6	2.89
7	2.71
8	2.94
9	3.48
10	4.23

Από τον Πίνακα 12.1 προκύπτει ότι οι 9 ελάχιστες τιμές της $C(s)$ είναι $C_{(1)} = C(7) = 2.71, C_{(2)} = C(6) = 2.89, C_{(3)} = C(8) = 2.94, \ldots, C_{(9)} = C(1) = 8.06$. Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας από την (12.13), αφού πρώτα υπολογιστούν οι τιμές είτε της $C^*Q)$ από την (12.11), είτε της $w(Q)$ από την (12.12), για διαδοχικές τιμές του Q μέχρι την πρώτη τιμή που ικανοποιεί τη συνθήκη τερματισμού. Οι τιμές των δύο συναρτήσεων έχουν υπολογιστεί στον Πίνακα 12.2.

Πίνακας 12.2: Πίνακας τιμών των $C^*(Q), w(Q)$

Q	$C^*(Q)$	$w(Q)$
1	8.71	0.18
2	5.80	0.28
3	4.85	1.91
4	4.51	2.19
5	4.32	5.58
6	4.30	8.38
7	4.36	11.22

Από τον πίνακα 12.2 και παίρνοντας υπόψη την τιμή $Ka = 6$, βλέπουμε ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} = \inf\{Q \geq 1 : w(Q) > 6\} = 6.$$

Για το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας $R^*(Q^*) = R^*(6)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που περιγράψαμε παραπάνω. Ισοδύναμα, από τον Πίνακα 12.1 βλέπουμε ότι οι 6 ελάχιστες τιμές της $C(s)$, δηλαδή οι $C_{(1)}, \ldots, C_{(6)}$ αντιστοιχούν στις $C(5), \ldots, C(10)$. Επομένως $R^*(6) + 1 = 5$ και $R^*(6) = 4$.

Συνοψίζοντας η βέλτιστη (Q, R) πολιτική παραγγελιών για το παραπάνω προϊόν είναι $Q^* = 6, R^* = 4$, δηλαδή όταν η θέση αποθέματος φτάνει τη στάθμη 4 να γίνεται παραγγελία 6 μονάδων προϊόντος.

12.3 Έλεγχος Αποθεμάτων Μιας Περιόδου – Το Μοντέλο του Εφημεριδοπώλη

12.4 Επεκτάσεις Μοντέλου Εφημεριδοπώλη – Πρόβλημα Πολλών Περιόδων Χωρίς Πάγια Κόστη – Πολιτικές Α

12.5 Το Μοντέλο (s,S) Περιοδικής Παρακολούθησης Αποθέματος

12.6 Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

13.1 Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη αναφέρεται στην επιλογή βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας ενός προϊόντος για μια περίοδο, το οποίο απαξιώνεται στο τέλος της περιόδου, όταν η ζήτηση του προϊόντος κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι αβέβαια. Τέτοια προϊόντα με μικρή διάρκεια ζωής είναι οι εφημερίδες και τα περιοδικά, τα λουλούδια, φρέσκα προϊόντα διατροφής κλπ.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα είδος προϊόντος το οποίο θα πρέπει να προμηθευτούμε για μια χρονική περίοδο, το οποίο απαξιώνεται γρήγορα και επομένως δεν μπορεί να πωληθεί σε επόμενη περίοδο. Πιθανά, όμως, τα προϊόντα που μένουν απούλητα να μπορούν να επιστραφούν ή να εκποιηθούν σε κάποια τιμή ευκαιρίας.

Συμβολίζουμε με x το αρχικό απόθεμα του προϊόντος. Η απόφαση αφορά των αριθμό των προϊόντων που πρέπει να παραγγελθούν (ή να παραχθούν) ώστε να είναι έτοιμα για κατανάλωση. Επομένως αν a είναι η απόφαση που αναφέρεται στην ποσότητα των προϊόντων που θα παραγγελθεί, έχουμε ότι το ύψος του αποθέματος μετά την παραγγελία θα είναι $y = x + a$. Μπορούμε να σκεφτόμαστε την a ή την y ως τη μεταβλητή της απόφασης. Η ζήτηση στη διάρκεια της περιόδου είναι άγνωστη και μοντελοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή D, με γνωστή κατανομή $F_D(x)$. Για απλότητα στην παρουσίαση θα υποθέσουμε ότι η κατανομή της D είναι (απόλυτα) συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_D(x)$.

Όσον αφορά τα κόστη, θεωρούμε ότι υπάρχει πάγιο κόστος K για την τοποθέτηση μιας παραγγελίας, καθώς και κόστος c ανά μονάδα προϊόντος. Επίσης, υπάρχει κόστος h ανά μονάδα προϊόντος που θα μείνει στο τέλος της περιόδου (το οποίο περιλαμβάνει πιθανά κόστη αποθήκευσης μείον την τιμή ευκαιρίας με την οποίας επιστρέφεται ή εκποιείται κάθε κομμάτι). Επίσης, υπάρχει κόστος έλλειψης p ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης που αντικατατοπτρίζει τα χαμένα κέρδη και την απώλεια καλής φήμης της εταιρείας. Υποθέτουμε ότι $p > c$. Αυτό είναι εύλογο, διότι διαφορετικά (αν $p \leq c$), τότε συμφέρει να μην παραγγέλνεται τίποτα, αφού η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίησή του μέσω παραγγελίας.

Αν ληφθεί η απόφαση να παραγγελθούν a προϊόντα, δηλαδή το επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας να είναι $y = x + a$, τότε το αναμενόμενο κόστος είναι

$$\begin{aligned} c(x,a) &= \begin{cases} K + ca + hE[(x+a-D)^+] + pE[(x+a-D)^-] & \text{αν } a > 0, \\ hE[(x-D)^+] + pE[(x-D)^-] & \text{αν } a = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} K + cy + hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] - cx & \text{αν } y > x, \\ hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] & \text{αν } y = x \end{cases} \\ &= \begin{cases} K + cy + l(y) - cx & \text{αν } y > x, \\ l(x) & \text{αν } y = x, \end{cases} \end{aligned} \tag{13.1}$$

όπου

$$\begin{aligned} l(y) &= hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] \\ &= h\int_0^y (y-\xi)f_D(\xi)d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y)f_D(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Για κάθε σταθερό d, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $(y-d)^+$ και $(y-d)^-$ είναι κυρτές ως προς y, επομένως και οι $E[(y-D)^+]$, $E[(y-D)^-]$ είναι κυρτές ως προς y (γενικότερα, αν Z τυχαία μεταβλητή και $f(y,z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z, τότε και $E[f(y,Z)]$ είναι κυρτή ως προς y). Επομένως η $l(y)$ είναι επίσης κυρτή (γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων με μη-αρνητικούς συντελεστές είναι κυρτή συνάρτηση). Έστω τώρα S η τιμή της y που ελαχιστοποιεί την $cy + l(y)$ στο $[0,\infty)$ (η οποία υπάρχει σίγουρα αφού $\lim_{y\to\infty}(cy + l(y)) = \infty$). Έστω, επίσης, s να είναι η μικρότερη τιμή της y ώστε $cs + l(s) = K + cS + l(S)$. Για να βρούμε πού πιάνεται το ελάχιστο της $c(x,a)$ που δίνεται από την (13.1) διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν $x > S$, $s \le x \le S$ ή $x < s$. Από την κυρτότητα της $cy + l(y)$, έχουμε ότι

- Για $x > S$, είναι $K+cy+l(y)-cx > K+cx+l(x)-cx > l(x)$, για κάθε $y > x$. Πράγματι η $K+cy+l(y)-cx$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y για $y > x$, αφού η $K + cy + l(y) - cx$ είναι κυρτή με ελάχιστο στο S και $x > S$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο της $c(x,a)$ πιάνεται στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή για $a = 0$.

- Για $s \le x \le S$, η ελάχιστη τιμή του πρώτου κλάδου της $c(x,a)$, δηλαδή της $K + cy + l(y) - cx$, για $y > x$, πιάνεται στο S και είναι $K + cS + l(S) - cx = cs + l(s) - cx$. Όμως η $cy + l(y)$ είναι φθίνουσα στο $[s,x]$ αφού $x < S$, οπότε $cs + l(s) > cx + l(x)$ ή ισοδύναμα $cs + l(s) - cx > l(x)$. Επομένως, έχουμε ότι το ελάχιστο της $c(x,a)$ πιάνεται και πάλι στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή για $a = 0$.

- Για $x < s$, η ελάχιστη τιμή του πρώτου κλάδου της $c(x,a)$, δηλαδή της $K + cy + l(y) - cx$, για $y > x$, πιάνεται στο S και είναι $K + cS + l(S) - cx = cs + l(s) - cx$. Όμως η $cy + l(y)$ είναι φθίνουσα στο $[x,s]$ αφού $x, s < S$, οπότε $cx + l(x) > cs + l(s)$ ή ισοδύναμα $cs + l(s) - cx < l(x)$. Επομένως, έχουμε ότι το ελάχιστο της $c(x,a)$ πιάνεται στον πρώτο κλάδο, και μάλιστα για $y = S$ ή ισοδύναμα $a = S - x$.

Για να βρούμε την τιμή του S, πρέπει να δούμε που ελαχιστοποιείται η κυρτή συνάρτηση $cy+l(y)$. Ισοδύναμα πρέπει να δούμε που μηδενίζεται η παράγωγός της. Έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy}(cy + l(y)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d}{dy}\left(cy + h\int_0^y (y-\xi)f_D(\xi)d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y)f_D(\xi)d\xi\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d}{dy}\left(cy + hyF_D(y) - h\int_0^y \xi f_D(\xi)d\xi + p\int_y^\infty \xi f_D(\xi)d\xi - py(1 - F_D(y))\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c + hF_D(y) + hyf_D(y) - hyf_D(y) - pyf_D(y) - p + pF_D(y) + pyf_D(y) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & F_D(y) = \frac{p-c}{p+h}. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Επομένως, καταλήξαμε στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 13.1 *Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη είναι τύπου* (s, S)*, δηλαδή θα πρέπει να παραγγέλνει ώστε να φθάσει σε επίπεδο αποθέματος* S*, αν το αρχικό απόθεμα του είναι κάτω από* s*, δηλαδή,*

$$a^*(x) = \begin{cases} S - x, & \text{αν } x < s, \\ 0, & \text{αν } x \geq s. \end{cases} \tag{13.4}$$

Είναι

$$S = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+h}\right) \tag{13.5}$$

και το s *είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης*

$$cs + l(s) = K + cS + l(S), \tag{13.6}$$

με $l(y)$ *που δίνεται από την* (13.2).

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει πάγιο κόστος παραγγελίας, δηλαδή $K = 0$, είναι $s = S$.

13.2 Ένα μοντέλο αποθεμάτων πολλών περιόδων χωρίς πάγια κόστη

Θεωρούμε μια αποθήκη απεριόριστης χωρητικότητας, η οποία πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για τις επόμενες t περιόδους για την κάλυψη της ζήτησης ενός προϊόντος. Στην αρχή κάθε περιόδου, ο διαχειριστής της αποθήκης αποφασίζει την ποσότητα της παραγγελίας που θα θέσει. Η παραγγελία παραδίδεται άμεσα με κόστος c ανά κομμάτι, ενώ δεν υπάρχει πάγιο κόστος. Η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου n περιγράφεται από μια μη-αρνητική, φραγμένη τυχαία μεταβλητή D_n με συνάρτηση κατανομής $F_{D_n}(x)$, γίνεται γνωστή αμέσως μετά την παραλαβή της παραγγελίας και ικανοποιείται στο βαθμό που είναι δυνατό από το υπάρχον απόθεμα. Τα προϊόντα που περισσεύουν αποθηκεύονται για ικανοποίηση της μελλοντικής ζήτησης. Το κόστος αποθήκευσης ανά κομμάτι για μια περίοδο είναι h. Υπάρχουν κόστη έλλειψης που αντιστοιχούν στην ανικανοποίητη ζήτηση κάθε περιόδου. Το κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος είναι p. Η ανικανοποίητη ζήτηση μιας περιόδου καταγράφεται ώστε να ικανοποιηθεί από μελλοντικές παραγγελίες (backlogging). Το ζητούμενο είναι να βρεθεί βέλτιστη πολιτική παραγγελίας, που να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος για τις t περιόδους. Υποθέτουμε ότι $p > c$. Αυτό είναι εύλογο, διότι διαφορετικά (αν $p \leq c$), τότε συμφέρει να μην παραγγέλνεται τίποτα, αφού η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίησή του μέσω παραγγελίας.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός n των περιόδων παραγγελίας που απομένουν.
- Κατάσταση: Ο αριθμός x των προϊόντων στην αποθήκη (στάθμη αποθέματος) στην αρχή μιας περιόδου.
- Απόφαση: Η ποσότητα a της παραγγελίας.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$, το ελάχιστο αναμενόμενο συνολικό κόστος από την περίοδο n και μετά, αν ο τρέχων αριθμός προϊόντων στην αποθήκη είναι x και απομένουν n περίοδοι.

Αν την περίοδο n υπάρχει απόθεμα x, γίνει παραγγελία a προϊόντων και η ζήτηση είναι D_n τότε η κατάσταση στην αρχή της επόμενης περιόδου θα είναι $x + a - D_n$. Επιπλέον, θα υπάρχει άμεσο κόστος παραγγελίας ca, κόστος αποθήκευσης για την τρέχουσα περίοδο $h(x+a-D_n)^+$ και κόστος έλλειψης για την τρέχουσα περίοδο $p(x+a-D_n)^-$. Επομένως, το μέσο κόστος αν ληφθεί η απόφαση a θα είναι

$$c(x, a; n) = ca + hE[(x+a-D_n)^+] + pE[(x+a-D_n)^-].$$

Η εξίσωση βελτιστοποίησης θα έχει εδώ τη μορφή

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, && (13.7)\\ v_n(x) &= \min_{a\in[0,\infty)} [c(x,a;n) + E[v_{n-1}(x+a-D_n)]] \\ &= \min_{y\in[x,\infty)} [cy + hE[(y-D_n)^+] + pE[(y-D_n)^-] + E[v_{n-1}(y-D_n)]] - cx \\ &= \min_{y\in[x,\infty)} [cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y-D_n)]] - cx, \quad x\in\mathbb{R}, && (13.8)\end{aligned}$$

όπου

$$l_n(y) = hE[(y-D_n)^+] + pE[(y-D_n)^-]. \tag{13.9}$$

Είναι φανερό ότι το παρόν μοντέλο είναι το ανάλογο του μοντέλου του εφημεριδοπώλη (βλέπε παράγραφο 13.1) για πολλές περιόδους παραγγελίας, αλλά χωρίς πάγια κόστη για τις παραγγελίες. Όπως και στο μοντέλο του εφημεριδοπώλη , είναι βολικό να δουλέψουμε βλέποντας ως μεταβλητή απόφασης την y, δηλαδή τη στάθμη αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας που θα θέσουμε, αντί της ποσότητας παραγγελίας a.

Για κάθε n, έχουμε ότι η συνάρτηση $cy + l_n(y)$ είναι κυρτή, διότι για κάθε σταθερό d, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $(y-d)^+$ και $(y-d)^-$ είναι κυρτές ως προς y, επομένως και οι $E[(y-D_n)^+]$ και $E[(y-D_n)^-]$ είναι κυρτές ως προς y (χρησιμοποιώντας ότι αν $f(y,z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z και Z τυχαία μεταβλητή, τότε και η $E[f(y,Z)]$ είναι κυρτή ως προς y).

Επίσης, για κάθε n, έχουμε ότι για αρκετά μεγάλα y θα ισχύει $y - D_n > 0$, με βεβαιότητα, αφού η D_n είναι φραγμένη. Επομένως, για τέτοια y θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[(y-D_n)^+] &= E[y-D_n] = y - E[D_n] \\ E[(y-D_n)^-] &= 0 \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{y\to\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to\infty}(cy + hy - hE[D_n]) = \infty. \tag{13.10}$$

Ομοίως, για κάθε n, έχουμε ότι για αρκετά μικρά y θα ισχύει $y - D_n < 0$, με βεβαιότητα, αφού η D_n είναι φραγμένη. Επομένως, για τέτοια y θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[(y-D_n)^+] &= 0 \\ E[(y-D_n)^-] &= E[D_n - y] = E[D_n] - y \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{y\to-\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to-\infty}(cy - py + pE[D_n]) = \infty, \tag{13.11}$$

αφού $p > c$. Επομένως, έχουμε αποδείξει το εξής αποτέλεσμα:

Λήμμα 13.1 *Για κάθε n, η $cy + l_n(y)$ με $l_n(y)$ να δίνεται από την (13.9) είναι κυρτή και $\lim_{y\to\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to-\infty}(cy + l_n(y)) = \infty$ και επομένως έχει ολικό ελάχιστο.*

Από το λήμμα 13.1, για $n = 1$, έχουμε ότι η $cy + l_1(y)$ έχει ολικό ελάχιστο σε κάποιο S_1, οπότε είναι φθίνουσα στο $(-\infty, S_1)$ και αύξουσα στο (S_1, ∞). Από τις σχέσεις (13.7)-(13.8) παίρνουμε

$$v_1(x_1) = \begin{cases} cS_1 + l_1(S_1) - cx_1 & \text{αν } x_1 \le S_1, \\ l_1(x_1) & \text{αν } x_1 > S_1 \end{cases} \tag{13.12}$$

και το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος που πρέπει να υπάρχει μετά την παραλαβή της παραγγελίας για $n = 1$ είναι

$$y_1^*(x_1) = \begin{cases} S_1 & \text{αν } x_1 \leq S_1, \\ x_1 & \text{αν } x_1 > S_1. \end{cases} \tag{13.13}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $v_1(x_1) = w_1(x_1) - cx_1$, όπου η συνάρτηση

$$w_1(x_1) = \begin{cases} cS_1 + l_1(S_1) & \text{αν } x_1 \leq S_1 \\ cx_1 + l_1(x_1) & \text{αν } x_1 > S_1 \end{cases}$$

είναι κυρτή αφού η $cy + l_1(y)$ είναι κυρτή και το S_1 είναι το ελάχιστο της. Επομένως, η $v_1(x_1)$ είναι κυρτή ως άθροισμα δυο κυρτών συναρτησεων, της $w_1(x_1)$ και της γραμμικής $-cx_1$. Επίσης, όμοια με την απόδειξη των (13.10) και (13.11) έχουμε

$$\lim_{x_1 \to \infty} v_1(x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} l_1(x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} (hx_1 - hE[D_n]) = \infty. \tag{13.14}$$

$$\lim_{x_1 \to -\infty} v_1(x_1) = \lim_{x_1 \to -\infty} (cS_1 + l_1(S_1) - cx_1) = \infty. \tag{13.15}$$

Έτσι αποδείξαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 13.2 *Η συνάρτηση $v_1(x_1)$ είναι κυρτή και επιπλέον $\lim_{x_1 \to -\infty} v_1(x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} v_1(x_1) = \infty$. Αν S_1 είναι η ελάχιστη τιμή της $cy + l_1(y)$ στο $\mathbb{R}$, όπου η $l_1(y)$ δίνεται από την (13.9) για $n = 1$, τότε ο βέλτιστος κανόνας απόφασης όταν απομένει μια περίοδος παραγγελίας υπαγορεύει να παραγγελθεί ποσότητα*

$$a_1^*(x_1) = \begin{cases} S_1 - x_1 & \text{αν } x_1 \leq S_1, \\ 0 & \text{αν } x_1 > S_1. \end{cases} \tag{13.16}$$

Το θεώρημα 13.2 μπορεί να γενικευτεί ώστε να πάρουμε τους βέλτιστους κανόνες απόφασης για κάθε n.

Θεώρημα 13.3 *Για κάθε $n = 1, 2, \ldots, t$, η συνάρτηση $v_n(x_n)$ είναι κυρτή και επιπλέον $\lim_{x_n \to -\infty} v_n(x_n) = \lim_{x_n \to \infty} v_n(x_n) = \infty$. Αν S_n είναι η ελάχιστη τιμή της $cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y - D_n)]$ στο $\mathbb{R}$, όπου η $l_n(y)$ δίνεται από την (13.9), τότε ο βέλτιστος κανόνας απόφασης όταν απομένουν n περίοδοι παραγγελίας υπαγορεύει να παραγγελθεί ποσότητα*

$$a_n^*(x_n) = \begin{cases} S_n - x_n & \text{αν } x_n \leq S_n, \\ 0 & \text{αν } x_n > S_n. \end{cases} \tag{13.17}$$

Το θεώρημα 13.3 αποδεικνύεται με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ ισχύει, όπως αποδείξαμε στο θεώρημα 13.2. Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Ορίζουμε

$$u_n(y) = cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y - D_n)]. \tag{13.18}$$

Όπως έχουμε δει στο λήμμα 13.1, για κάθε n, η $cy + l_n(y)$ είναι κυρτή και $\lim_{y \to \infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y \to -\infty}(cy + l_n(y)) = \infty$. Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για την $E[v_{n-1}(y - D_n)]$ ως συνάρτηση του y. Πράγματι, για κάθε z η συνάρτηση $v_{n-1}(y - z)$ είναι κυρτή ως προς y λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Αλλά τότε και η $E[v_{n-1}(y - D_n)]$ είναι κυρτή ως προς y (διότι, αν Z τυχαία μεταβλητή και $f(y, z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z, τότε και $E[f(y, Z)]$ είναι κυρτή ως προς y). Επίσης, από την ανισότητα Jensen έχουμε ότι

$$E[v_{n-1}(y - D_n)] \geq v_{n-1}(y - E[D_n]),$$

που σε συνδυασμό με την επαγωγική υπόθεση

$$\lim_{y \to -\infty} v_{n-1}(y) = \lim_{y \to \infty} v_{n-1}(y) = \infty,$$

δίνει ότι

$$\lim_{y\to-\infty} E[v_{n-1}(y-D_n)] = \lim_{y\to\infty} E[v_{n-1}(y-D_n)] = \infty.$$

Άρα, η $u_n(y)$ που δίνεται από την (13.18) είναι κυρτή και

$$\lim_{y\to\infty} u_n(y) = \lim_{y\to-\infty} u_n(y) = \infty.$$

Από εδώ και πέρα η απόδειξη προχωρά, όπως και η απόδειξη για το θεώρημα 13.2, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι η $u_n(y)$ έχει ένα ολικό ελάχιστο S_n και επομένως είναι φθίνουσα στο $(-\infty, S_n)$ και αύξουσα στο (S_n, ∞). Από τις σχέσεις (13.7)-(13.8) παίρνουμε

$$v_n(x_n) = \begin{cases} u_n(S_n) - cx_n & \text{αν } x_n \le S_n, \\ u_n(x_n) - cx_n & \text{αν } x_n > S_n \end{cases}$$

και το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος που πρέπει να υπάρχει μετά την παραλαβή της παραγγελίας, n περιόδους πριν το τέλος είναι

$$y_n^*(x_n) = \begin{cases} S_n & \text{αν } x_n \le S_n, \\ x_n & \text{αν } x_n > S_n. \end{cases}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $v_n(x_n) = w_n(x_n) - cx_n$, όπου η συνάρτηση

$$w_n(x_n) = \begin{cases} u_n(S_n) & \text{αν } x_n \le S_n \\ u_n(x_n) & \text{αν } x_n > S_n \end{cases}$$

είναι κυρτή αφού η $u_n(y)$ είναι κυρτή και το S_n είναι το ελάχιστο της. Επομένως, η $v_n(x_n)$ είναι κυρτή ως άθροισμα δυο κυρτών συναρτησεων, της $w_n(x_n)$ και της γραμμικής $-cx_n$. Επίσης, όμοια με την απόδειξη των (13.10) και (13.11) έχουμε

$$\lim_{x_n\to\infty} v_n(x_n) = \lim_{x_n\to-\infty} v_n(x_n) = \infty.$$

13.3 Ασκήσεις