Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου

Κατανομή ισορροπίας

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $p = (p_j)$ κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{p} = (p_j)$ μη-αρνητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \ j \in \mathcal{X},$$

που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_j = 1.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.σ.χ. I

- $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\{X(t)\}$ θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow$ $\{X(t)\}$ έχει μια στάσιμη κατανομή $\mathbf{p} = (p_j)$.
- Αν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι μοναδική.
- Κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\mathbf{p}$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.σ.χ. II

- p_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du}{t} = p_j, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathcal{X}.$$
(**p** οριακή δειγματική κατανομή της $\{X(t)\}$).
- p_j: μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:
$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du]}{t} = p_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$
- p_j: αντίστροφος του γινομένου του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j με τον ρυθμό εξόδου q_j:
$$p_j = \frac{1}{q_j m_j}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.σ.χ. III

- p_j: C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_j(u)du}{t} = p_j, \; j \in \mathcal{X}.$$

(**p** είναι η C-οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$).

- p_j: οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j, \; j \in \mathcal{X}.$$

(**p** είναι η οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$).

- Αν η Μ.α.σ.χ. έχει αρχική κατανομή την **p**, τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την **p**:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} \;\Rightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}, \; t \geq 0.$$

(**p** είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X(t)\}$).

Υπολογισμοί με την κατανομή ισορροπίας

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ., αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\mathbf{p} = (p_j : j \in \mathcal{X})$ η κατανομή ισορροπίας της.
- Τότε:
  1. p_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η $\{X(t)\}$ περνάει στην j.
  2. $p_j q_{ji}$: μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων τύπου $j \to i$.
  3. q_{ji}: μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων προς την i, ανά χρονική μονάδα παραμονής στην j.

Αιτιολογήσεις

- Εργοδικό ϑεώρημα Μ.α.σ.χ. $\Rightarrow$
  p_j= μακροπρόϑεσμο ποσοστό χρόνου που η $\{X(t)\}$ περνάει στην j.

- Ο μακροπρόϑεσμος ρυϑμός μεταβάσεων $j \to i$ υπολογίζεται με το ΣΑΘΚ.
- $\{X(t)\}$: Αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις επισκέψεις στην $j \in \mathcal{X}$.
- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία επισκέψεων στην j.
- $\{C(t)\}$: Διαδικασία κόστους με

$$C(t) = \text{πλήϑος μεταβάσεων } j \to i \text{ στο } [(0, t].$$

Αιτιολογήσεις (συνέχεια)

- ΣΑΘΚ ⇒
$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t}}_{\text{Ρυθμός μεταβ. } j\to i} = \frac{E[C]}{E[X]},$$
με
$E[C] = p_{ji} = \frac{q_{ji}}{q_j}$: μέσο αριθμό μεταβάσεων $j \to i$ μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην j,
$E[X] = m_j = \frac{1}{q_j p_j}$: μέσο χρόνο επανόδου στην j.
- Άρα:
$$\text{Ρυθμός μεταβ. } j \to i = \frac{\frac{q_{ji}}{q_j}}{\frac{1}{q_j p_j}} = p_j q_{ji}.$$

Αιτιολογήσεις (συνέχεια)

- Τέλος, για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων προς την i, ανά χρονική μονάδα παραμονής στην j:

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to\infty} \frac{\text{Πλήθος μεταβάσεων } j \to i \text{ στο } (0,t]}{\text{Χρόνος παραμονής στην } j \text{ στο } (0,t]} \\ = & \frac{\lim_{t\to\infty}(\text{Πλήθος μεταβάσεων } j \to i \text{ στο } (0,t])/t}{\lim_{t\to\infty}(\text{Χρόνος παραμονής στην } j \text{ στο } (0,t])/t} \\ = & \frac{p_j q_{ji}}{p_j} = q_{ji}. \end{aligned}$$

Ερμηνεία εξισώσεων ισορροπίας

- Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση j:

$$p_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}.$$

- $p_j \sum_{i \neq j} q_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από την j προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς την j από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση ισορροπίας: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς την j είναι ίσα.

Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

- Ίδια ιδέα με εξισώσεις ισορροπίας, αλλά αντί για κατάσταση j έχουμε σύνολο A.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς το $\mathcal{A}$ είναι ίσα.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_j q_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από το A προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_i q_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς το A από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για το σύνολο A:

$$\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_j q_{ji} = \sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_i q_{ij}.$$

Μ.α.σ.χ. γέννησης-θανάτου

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. τύπου γέννησης θανάτου $\Leftrightarrow$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = i + 1, \\ \mu_i & \text{αν } i = 1, 2, 3, \ldots, \quad j = i - 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Εξισώσεις γενικ. ισορ. για $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, i-1\}$, $i \geq 1$
$\Rightarrow p_{i-1}\lambda_{i-1} = p_i\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$
- Άρα

$$p_i = p_0 \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_i}, \quad i \geq 1.$$

- Εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \Rightarrow$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_i}\right)^{-1}.$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου με κόστη

Δομές κόστους

- $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
  1. $c : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους παραμονής
     $c(j)$: κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής στην j της $\{X(t)\}$.
  2. $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους μετάβασης
     $d(i, j)$: κόστος μιας μετάβασης $i \to j$ της $\{X(t)\}$.

Ρυθμοί κόστους

- Κόστος μέχρι την χρονική στιγμή t:

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du + \sum_{k=0}^{N(t)} d(X_k, X_{k+1}),\ t \geq 0,$$

  $X_0 = X(0)$,
  $\{N(t)\}$ η απαριθμήτρια μεταβάσεων της $\{X(t)\}$,
  $\{X_n\}$ η Μ.α.δ.χ. των μεταβάσεων της $\{X(t)\}$.

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t}.$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t}.$$

Υπολογισμός ρυθμού κόστους

- $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη με στάσιμη κατανομή (p_j) και

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} p_j \left(|c_j| + \sum_{k \neq j} q_{jk} |d(j,k)| \right) < \infty.$$

$\Rightarrow$

1. Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{t} = \sum_{j \in \mathcal{X}} p_j c(j) + \sum_{j \in \mathcal{X}} \sum_{k \neq j} p_j q_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθ. } 1.$$

2. Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \sum_{j \in \mathcal{X}} p_j c(j) + \sum_{j \in \mathcal{X}} \sum_{k \neq j} p_j q_{jk} d(j,k).$$

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Περιγραφή

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ.
- $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- 1 υπηρέτης.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- r: κέρδος ανά εξυπηρετούμενο πελάτη.
- c: κόστος ανά χρονική μονάδα για κάθε πελάτη.
- q: μεταβλητή απόφασης $\rightarrow$ πιθανότητα αποδοχής πελάτη.
- $b(q)$: αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση $\rightarrow$ μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους.

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Λύση

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους:

$$b(q) = \sum_{j\in\mathcal{X}} p_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{X}} \sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d(j,k),$$

με

$$c(j) = -cj, \quad d(j,k) = \begin{cases} r & j = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = j+1, \\ 0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

και (p_j) την κατανομή ισορροπίας:

$$p_j = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0, \quad \text{με } \rho = \frac{\lambda q}{\mu},$$

(όταν το σύστημα είναι ευσταθές $(\rho < 1)$.

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Λύση (συνέχεια)

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους:

$$
\begin{aligned}
b(q) &= -\sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^j cj + \sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^j \lambda qr \\
&= -c\frac{\lambda q}{\mu - \lambda q} + \lambda qr, \\
b'(q) &= -\frac{c\lambda\mu}{(\mu-\lambda q)^2} + \lambda r, \\
b''(q) &= = \frac{-2c\lambda^2\mu}{(\mu-\lambda q)^3} < 0.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Λύση (συνέχεια)

- $b(q)$ κοίλη.

$$b'(q) = -\frac{c\lambda\mu}{(\mu-\lambda q)^2} + \lambda r = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}}\right) \overset{\text{ορσ}}{=} q^*.$$

- Βέλτιστη πιθανότητα αποδοχής:

$$q_{soc} \quad = \begin{cases} 0 & \text{αν } q^* \leq 0, \\ q^* & \text{αν } q^* \in (0,1), \\ 1 & \text{αν } q^* \geq 1. \end{cases}$$