Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου

Κατανομή ισορροπίας

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\pi = (\pi_j)$ κατανομή ισορροπίας της $\{X_n\}$

$$\Updownarrow$$

$\pi = (\pi_j)$ μη-αρνητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}, \; j \in \mathcal{X},$$

που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. I

- $\{X_n\}$ αδιαχώριστη Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\{X_n\}$ θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow$ $\{X_n\}$ έχει μια στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_j)$.
- Αν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι μοναδική.
- Κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\pi$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. II

- π_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}}{n} = \pi_j, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathcal{X}.$$

  (π είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της $\{X_n\}$).

- π_j: μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}]}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$

- π_j: αντίστροφος του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j:

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. III

- π_j: C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j,\ j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η C-οριακή κατανομή της $\{X_n\}$).

- Αν η Μ.α.δ.χ. απεριοδική, τότε π_j: οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j,\ j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η οριακή κατανομή της $\{X_n\}$).

- Αν η Μ.α.δ.χ. έχει αρχική κατανομή την π, τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την π:

$$\pi^{(0)} = \pi \ \Rightarrow \pi^{(n)} = \pi,\ n \geq 0.$$

(π είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$).

Υπολογισμοί με την κατανομή ισορροπίας

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ., αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα πιθανοτητών μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\pi = (\pi_j : j \in \mathcal{X})$ η κατανομή ισορροπίας της.
- Τότε:
  1. π_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου (βημάτων) που η $\{X_n\}$ περνάει στην j.
  2. $\pi_j p_{ji}$: μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων τύπου $j \to i$.
  3. $\frac{\pi_j}{\pi_i}$: μέσος αριθμός επισκέψεων στην j μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i.

ΣΑΘΚ $\Rightarrow$ Τύπος $\frac{\pi_j}{\pi_i}$

- $\{X_n\}$: Αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις επισκέψεις σε κάποια $i \in \mathcal{X}$.
- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία επισκέψεων στην i.
- $\{C(t)\}$: Διαδικασία κόστους με

$$C(t) = \text{πλήθος επισκέψεων στην } j \text{ στο } [(0,t].$$

- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t}}_{\pi_j} = \frac{E[C]}{E[X]},$$

με
$E[C]$: μέσο αριθμό επισκέψεων στην j μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i,
$E[X] = m_i = \frac{1}{\pi_i}$.

- Άρα $E[C] = \frac{\pi_j}{\pi_i}$.

Ερμηνεία εξισώσεων ισορροπίας

- Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση j:

$$\pi_j \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}.$$

- $\pi_j \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από την j προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς την j από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση ισορροπίας: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς την j είναι ίσα.

Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

- Ίδια ιδέα με εξισώσεις ισορροπίας, αλλά αντί για κατάσταση j έχουμε σύνολο A.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς το $\mathcal{A}$ είναι ίσα.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c}\pi_j p_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από το A προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c}\pi_i p_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς το A από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για το σύνολο A:

$$\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c}\pi_j p_{ji} = \sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{i\in\mathcal{A}^c}\pi_i p_{ij}.$$

Κατανομή ισορροπίας Μ.α.δ.χ. γέννησης-θανάτου

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. τύπου γέννησης θανάτου

$$\Updownarrow$$

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = i + 1, \\ r_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = i, \\ q_i & \text{αν } i = 1, 2, 3, \ldots, \quad j = i - 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Εξισώσεις γενικ. ισορ. για $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, i-1\}$, $i \geq 1$ $\Rightarrow \pi_{i-1} p_{i-1} = \pi_i q_i, \quad i = 1, 2, \ldots$.
- Άρα

$$\pi_i = \pi_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad i \geq 1.$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με κόστη

Δομές κόστους

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
  1. $c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους παραμονής
     $c(j)$: κόστος μιας επίσκεψης (δηλαδή, χρονικής μονάδας παραμονής) στην j της $\{X_n\}$.
  2. $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους μετάβασης
     $d(i,j)$: κόστος μιας μετάβασης $i \to j$ της $\{X_n\}$.

Ρυθμοί κόστους

- Κόστος μέχρι την n-οστή μετάβαση:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (c(X_k) + d(X_k, X_{k+1})), \; n \geq 0,$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n}.$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[C(n)]}{n}.$$

Υπολογισμός ρυθμού κόστους

- $\{X_n\}$ αδιαχώριστη με στάσιμη κατανομή (π_j) και

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j \left(|c_j| + \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{jk} |d(j,k)| \right) < \infty$$

$\Rightarrow$

1. Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθ. } 1.$$

2. Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[C(n)]}{n} = \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k).$$

Αιτιολόγηση

- Αναγεννητικός κύκλος: Το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$
  Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους $= \frac{E[C]}{E[X]}$,
  $E[C]$: Μέσο κόστος σε έναν κύκλο,
  $E[X]$: Μέση διάρκεια κύκλου.
- $$E[X] = \frac{1}{\pi_i}.$$
- $$E[C] = \sum_j \frac{\pi_j}{\pi_i} c(i) + \sum_j \sum_k \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{jk} d(j,k).$$

  διότι $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων στην j σε έναν κύκλο.

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Περιγραφή

- Μηχανή επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας.
- Καταστάσεις μηχανής: 0 (άριστη), $1, 2, \dots$ (μεγάλη τιμή $\to$ κακή κατάσταση).
- Μετά από κάθε επιθεώρηση, ο διαχειριστής αποφασίζει αν θα αντικαταστήσει τη μηχανή με καινούργια ή όχι.
- $b(i)$: κόστος λειτουργ. μηχανής κατάστασης i. ($b(i) \uparrow$).
- r: επιπλέον κόστος αντικατάστασης.
- Αντικατάσταση $\Rightarrow$ Κατάσταση 0 την επόμενη μέρα.
- Όχι αντικατάσταση $\Rightarrow$ Πιθανότητα εξέλιξης κατάστασης μηχανής $i \to j$: $g_i(j)$, για $j \geq i$.
- T_i τ.μ. κατάστασης επόμενης μέρας, αν η τρέχουσα κατάστασή της είναι i.
- Συνήθης υπόθεση: T_i στοχαστικά αύξουσα ως προς i.

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Πολιτικές & Μοντελοποίηση

- Ο διαχειριστής ακολουθεί μια πολιτική κατωφλίου για την αντικατάσταση:
  Αντικατάσταση $\Leftrightarrow$ Κατάσταση μηχανής$\geq n$.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους υπό αυτή την πολιτική=;
- Κατάσταση μηχανής υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι $n \to$ Μ.α.δ.χ. με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} g_i(j) & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j \geq i, \\ 1 & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Κατανομή ισορροπίας & Εξισώσεις

- Εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή $\pi(n) = (\pi_j(n))$:

$$\begin{aligned}
\pi_0(n) &= g_0(0)\pi_0(n) + \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i(n), \\
\pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{j} g_i(j)\pi_i(n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\
\pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i(j)\pi_i(n), \quad j \geq n.
\end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Δομή και ρυθμός κόστους

- Δομή κόστους παραμονής: $c(i) = b(i)$, $i \geq 0$.
- Δομή κόστους μετάβασης:$d(i, j)$ με $d(i, 0) = r$ για $i \geq n$ και $d(i, j) = 0$, διαφορετικά.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) c(j) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_j(n) p_{jk} d(j, k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) b(j) + \sum_{j=n}^{\infty} r \pi_j(n). \end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Ειδική περίπτωση

- $b(i) = 1 - b^i$, όπου $b \in (0,1)$.
- $g_i(i) = 1 - \alpha$,
  $g_i(i+1) = \alpha$, και
  $g_i(j) = 0$, για $j \neq i, i+1$.
- Τότε (υπό την πολιτική κατωφλίου) $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ και πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i, \\ \alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i+1, \\ 1 & \text{αν } i = n, \quad j = 0. \end{cases}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Λύση ειδικής περίπτωσης Ι

- Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned}
\pi_0(n) &= \pi_n(n) + (1-\alpha)\pi_0(n), \\
\pi_j(n) &= \alpha\pi_{j-1}(n) + (1-\alpha)\pi_j(n), \quad 1 \le j \le n-1, \\
\pi_n(n) &= \alpha\pi_{n-1}(n).
\end{aligned}$$

- Λύση:

$$\begin{aligned}
\pi_j(n) &= \frac{1}{n+\alpha}, \quad 0 \le j \le n-1, \\
\pi_n(n) &= \frac{\alpha}{n+\alpha}.
\end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Λύση ειδικής περίπτωσης II

- Δομή κόστους:
  Κόστος παραμονής: $c(i) = 1 - b^i$, $0 \leq i \leq n$.
  Κόστος μετάβασης:$d(i,j)$ με $d(n,0) = r$ και $d(i,j) = 0$, διαφορετικά.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+\alpha}(1-b^j) + \frac{\alpha}{n+\alpha}(1-b^n) + \frac{\alpha}{n+\alpha} r \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+n}(r-1) + 1 + \frac{1-b^n}{n+a}\left(\alpha - \frac{1}{1-b}\right). \end{aligned}$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Ορισμός Μ.α.σ.χ.

- $\{X(t)\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου (Μ.α.σ.χ.) με χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$ αν
  1. $X(t) \in \mathcal{X}$, $t \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,
  2. $\Pr[X(t+s) = j | X(u), 0 \leq u < s, X(s) = i] = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$, $t, s \geq 0$, $i, j \in \mathcal{X}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).
  3. Αν οι $\Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$ δεν εξαρτώνται από το t, η Μ.α.σ.χ. λέγεται ομογενής. Τότε συμβολίζουμε:
  $$p_{ij}(t) = \Pr[X(s+t) = j | X(s) = i].$$
  4. Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετήσουμε μόνο ομογενείς Μ.α.σ.χ.

Βασικά στοιχεία Μ.α.σ.χ.

- Για να προσδιοριστεί μια Μ.α.σ.χ. $\{X(t)\}$ χρειαζόμαστε:

1. Αρχική κατανομή:

$$\mathbf{p}(0) = (p_i(0)),\ \text{με}\ p_i(0) = \Pr[X(0) = i].$$

2. Πίνακα ρυθμών μετάβασης:

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}),\ \text{με}$$

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \; = p'_{ij}(0) \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, \quad i, j \in \mathcal{X} \text{ με } i \neq j, \\ q_{ii} &= \; -q_i = p'_{ii}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}, \quad i \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

(q_{ij}: ρυθμός $i \to j$, q_i: ρυθμός εξόδου από την i)

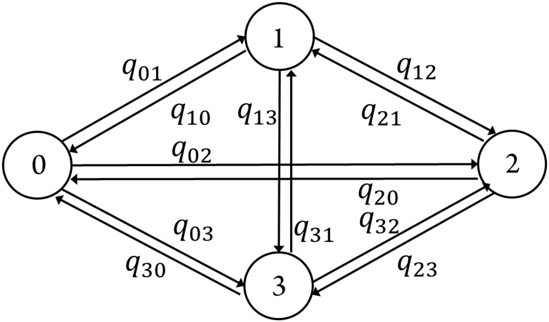
Πίνακας ρυθμών μετάβασης

- Γενική μορφή:

$$\mathbf{Q} = \left(p'_{ij}(0)\right) = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Μη-αρνητικά στοιχεία εκτός διαγωνίου.
- Μη-θετικά διαγώνια στοιχεία.

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης - Παράδειγμα



Σχήμα: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3\}$.

Χρόνοι παραμονής στις καταστάσεις Μ.α.σ.χ. Ι

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- Χρόνος παραμονής T_i σε μια κατάσταση i πριν από κάποια μετάβαση σε κατάσταση $j \neq i$ είναι εκθετικός με παράμετρο q_i.
- Αιτιολόγηση:

$$\begin{aligned} \Pr[T_i > t+h | T_i > t] &= \Pr[X(t+h) = i | X(t) = i] + o(h) \\ &= p_{ii}(h) + o(h) = 1 - q_i h + o(h), \\ &\quad h \to 0^+ \end{aligned}$$

δεν εξαρτάται από το t, οπότε η T_i έχει την αμνήμονη ιδιότητα και άρα έχει εκθετική κατανομή.

Χρόνοι παραμονής στις καταστάσεις Μ.α.σ.χ. II

- $F_{T_i}(t)$: σ.κ., $f_{T_i}(t) = F'_{T_i}(t)$ σ.π.π. της T_i. Τότε:

$$\Pr[t < T_i \leq t + h | T_i > t] = q_i h + o(h), \quad h \to 0^+$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\Pr[t < T_i \leq t + h]}{\Pr[T_i > t]} = q_i h + o(h), \quad h \to 0^+$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[t < T_i \leq t + h]}{h \Pr[T_i > t]} = q_i$$
$$\Rightarrow \quad \frac{f_{T_i}(t)}{1 - F_{T_i}(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}(1 - F_{T_i}(t))}{1 - F_{T_i}(t)} = q_i$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\log(1 - F_{T_i}(t))) = -q_i$$

- Άρα $F_{T_i}(t) = 1 - e^{-q_i t}$, $t \geq 0$, δηλαδή η T_i είναι $\mathrm{Exp}(q_i)$.

Πιθανότητες μετάβασης Μ.α.σ.χ.

- Όταν η $\{X(t)\}$ φύγει από κάποια κατάσταση i, η επόμενη κατάσταση θα είναι η $j \neq i$ με πιθανότητα $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$.
- Αιτιολόγηση:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \to 0^+} \Pr[X(t+h) = j | X(t) = i, X(t+h) \neq i] \\
= & \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[X(t) = i, X(t+h) = j]}{\Pr[X(t) = i, X(t+h) \neq i]} \\
= & \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[X(t+h) = j | X(t) = i]}{\Pr[X(t+h) \neq i | X(t) = i]} \\
= & \lim_{h \to 0^+} \frac{q_{ij}h + o(h)}{q_i h + o(h)} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j \neq i.
\end{aligned}$$

Άλλοι ορισμοί Μ.α.σ.χ.

- Εναλλακτικός ορισμός I:
  $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. $\Leftrightarrow$
  Όντας σε μια κατάσταση i
  1. παραμένει εκεί για χρόνο $\mathrm{Exp}(q_i)$,
  2. η επόμενη κατάσταση είναι η j με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$.
- Εναλλακτικός ορισμός II:
  $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. $\Leftrightarrow$
  Όντας σε μια κατάσταση i
  1. υπάρχουν χρόνοι T_{ik} για $k \in \mathcal{X} \setminus \{i\}$, όπου ο χρόνος T_{ik} έχει την κατανομή $\mathrm{Exp}(q_{ik})$, $k \in \mathcal{X} \setminus \{i\}$,
  2. ο χρόνος της επόμενης μετάβασης είναι $\min_k T_{ik}$ και η κατάσταση j στην οποία πηγαίνει η $\{X(t)\}$ είναι αυτή για την οποία $T_{ij} = \min_k T_{ik}$.

Σχέση πίνακα ρυθμών και πιθανοτήτων μετάβασης

- Οι πιθανότητες μετάβασης είναι η λύση του συστήματος (προδρομικών) εξισώσεων Chapman - Kolmogorov:

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \delta_{ij}, \\ p'_{ij}(t) &= -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj}, \ t \geq 0. \end{aligned}$$

- Σε πινακική μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \ t \geq 0. \end{aligned}$$

- Άρα:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!}, \ t \geq 0.$$

Επικοινωνία, περιοδικότητα, επαναληπτικότητα

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα ρυθμών $\mathbf{Q}$.
- $i \to j$ (j προσπελάσιμη από την i) $\Leftrightarrow \exists t \geq 0$: $p_{ij}(t) > 0$ $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$: $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \ldots q_{i_{n-1} j} > 0$.
- Η περιοδικότητα δεν υπάρχει σαν έννοια λόγω του συνεχούς χρόνου.
- Η επικοινωνία, η επαναληπτικότητα (θετική και μηδενική) και η παροδικότητα ανάλογα με τον διακριτό χρόνο (ορισμοί και αποτελέσματα).

Χρόνοι απορρόφησης

- $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$.
- Ορίζουμε:

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathcal{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$,

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

την πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i, και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

τον μέσο χρόνο πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Πιθανότητες πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$, με $h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i]$.
- Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_i &= 1, \; i \in \mathcal{C}, \\ x_i &= \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j, \; i \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$, με $m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}}|X(0) = i]$.
- Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} y_i &= 0, \; i \in \mathcal{C}, \\ y_i &= \frac{1}{q_i} + \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j, \; i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$