Οριακά θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία

Πλαίσιο οριακών θεωρημάτων

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία,
- X_k, $k \geq 1$: ενδιάμεσοι χρόνοι,
- $F_X(t)$: κατανομή ενδιάμεσων χρόνων,
- $E[X_k] = \mu$, $Var[X_k] = \sigma^2$,
- $m_X(t)$: ανανεωτική συνάρτηση.

Νόμος Μεγάλων Αριθμών (ΝΜΑ)

- Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό (μακροπρόθεσμη συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

- Αν $\mu < \infty$ και $\sigma^2 \in (0, \infty)$, έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \le x\right) = \Phi(x), \; x \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (ΣΑΘ)

- Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό (μακροπρόθεσμη μέση συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_X(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

- Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, η οριακή λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$$

δίνεται ως

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

- Μια τεχνική προϋπόθεση αφορά την 'απεριοδικότητα' της συνάρτησης κατανομής $F_X(t)$.

Περιοδικότητα/Απεριοδικότητα τ.μ. - Ορισμός

- X μη-αρνητική, γνήσια ($\Pr[X < \infty] = 1$.
- X περιοδική, αν υπάρχει $p > 0$ ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = kp] = 1$.
- Ο μεγαλύτερος τέτοιος p λέγεται περίοδος της X.
- X απεριοδική $\Leftrightarrow$ X όχι περιοδική.

Περιοδικότητα/Απεριοδικότητα τ.μ. - Παραδ.

- X συνεχής ή μεικτή $\Rightarrow X$ απεριοδική.
- $X \sim \mathrm{Bin}(n,p), \quad \mathrm{Poisson}(\lambda), \quad \mathrm{Geom}(p)$
  $\Rightarrow X$ περιοδική με $p = 1$.
- X τ.μ. με
  $\Pr[X = 0] = \frac{1}{3}$, $\Pr[X = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$, $\Pr[X = \frac{1}{3}] = \frac{1}{6}$
  $\Rightarrow X$ περιοδική με $p = \frac{1}{6}$.
- X τ.μ. με
  $\Pr[X = 0] = \frac{1}{3}$, $\Pr[X = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$, $\Pr[X = \sqrt{2}] = \frac{1}{6}$
  $\Rightarrow X$ απεριοδική.
- X τ.μ. με τιμές $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
  $\Rightarrow X$ απεριοδική.

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

- $h(t)$: μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

- $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$με $d_i(t) \geq 0$,φθίνουσες,φραγμένες.
- $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$.
- Τότε:
  1. X απεριοδική με μέση τιμή $\mu > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

  2. X περιοδική με περίοδο p και μέση τιμή $\mu > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} h(tp+x) = \frac{p\sum_{t=0}^\infty d(tp+x)}{\mu} \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΒΑΘ - Ιδέα απόδειξης για συνεχή X

- Παίρνουμε όριο στη λύση της ανανεωτικής:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

- $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$, αφού $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$.Άρα:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

- Σπάμε το ολοκλήρωμα σε δυο κομμάτια $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ και $\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u)$.

ΒΑΘ - Ιδέα απόδειξης για συνεχή X (συνέχεια)

- Το κλειδί είναι η κατάλληλη επιλογή του ϵ ώστε

1. το $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ να τείνει στο 0, καθώς $t \to \infty$.

   (Εύλογο αφού για μικρά u (στο $[0,\epsilon]$) το $d(t-u)$ θα είναι κοντά στο 0, αφού $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$).

2. για μεγάλα u (στο (ϵ, t)) η $m_X(u) \simeq \frac{u}{\mu}$ (ΣΑΘ),οπότε

$$
\begin{aligned}
\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u) &\simeq \frac{1}{\mu}\int_\epsilon^t d(t-u)du \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^{t-\epsilon} d(y)dy \to \frac{\int_0^\infty d(y)dy}{\mu},
\end{aligned}
$$

καθώς $t \to \infty$.

Εφαρμογή: Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$

- Ανανεωτική εξίσωση για μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $h(t) = E[R(t)]$:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$

- Μας ενδιαφέρει η οριακή λύση, $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$, για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ.
- Π.χ., αν $\{N(t)\}$ είναι η διαδικασία αφίξεων λεωφορείων σε μια στάση, το $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ είναι ο μέσος χρόνος μέχρι το επόμενο λεωφορείο.

Εφαρμογή: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- Προϋποθέσεις ΒΑΘ για $F_X(t)$:
  - Συνεχής $\Rightarrow$ Απεριοδική.
- Προϋποθέσεις ΒΑΘ για $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$:
  1. $d(t) \geq 0$.
  2. $d(t)$ φθίνουσα.
  3. $d(t) \leq \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \mu < \infty$, $d(t)$ φραγμένη.
  4. $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$;

Εφαρμογή: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |d(u)|du &= \int_0^\infty d(u)du \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty (1 - F_X(y))dydu \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty \int_y^\infty dF_X(x)dydu \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \int_0^y dudydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x ydydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \frac{x^2}{2}dF_X(x) = \frac{E[X^2]}{2} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2} < \infty.
\end{aligned}
$$

Εφαρμογή: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- ΒΑΘ εφαρμόσιμο. Τύπος οριακού μέσου υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης:

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

- Ερμηνεία:
  Σε κατάσταση ‘ισορροπίας’, ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος για το επόμενο γεγονός είναι $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$.
- Ανανεωτικό παράδοξο:
  Για $\sigma > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] > \frac{\mu}{2}.$$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$

- $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμ. χρόνους X_i.
- $X_i \sim F_X(t)$ συνεχής με σππ $f_X(t)$.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$.
- $m_X(t) = E[N(t)]$.
- ΣΑΘ: $m_X(t) \simeq \frac{t}{\mu}$, για μεγάλα t.
- $\lim_{t\to\infty} \left(m_X(t) - \frac{t}{\mu} \right) =;$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- $h(t) = m_X(t) - \frac{t}{\mu}$.
- $\lim_{t\to\infty} h(t)$;
- Ανανεωτική εξίσωση για την $m_X(t)$:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)dF_X(u).$$

- Αντικατάσταση της $h(t)$:

$$h(t) + \frac{t}{\mu} = F_X(t) + \int_0^t \left(h(t-u) + \frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u).$$

- Λύση ως προς $h(t) \to$ Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\
&\quad + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\
&= d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u),
\end{aligned}
$$

με

$$
d(t) = F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu}.
$$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Σκοπός: Έλεγχος προϋποθέσεων ΒΑΘ.
- Δυσκολία: Να γράφουμε $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, με $d_i(t) \geq 0$, φθίνουσες, φραγμένες.
- Τεχνική: Δουλεύουμε με την παράγωγο της $d(t)$.

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Παραγωγίζουμε την έκφραση της $d(t)$:

$$\begin{aligned} d(t) &= F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\ &= F_X(t) + \frac{t}{\mu} F_X(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t u dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\ \Rightarrow \quad d'(t) &= f_X(t) + \frac{1}{\mu} F_X(t) + \frac{t}{\mu} f_X(t) - \frac{1}{\mu} t f_X(t) - \frac{1}{\mu} \\ &= \underbrace{f_X(t)}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{1}{\mu}(1 - F_X(t))}_{\geq 0} \\ \Rightarrow \quad d(t) &= \underbrace{F_X(t)}_{\text{αύξουσα}} - \underbrace{\frac{1}{\mu}\int_0^t (1 - F_X(u)) du}_{\text{αύξουσα}}. \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Προσθαφαιρούμε κατάλληλο όρο για να έχουμε διαφορά φθινουσών:

$$
\begin{aligned}
d(t) &= F_X(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t (1 - F_X(u))du \\
&= F_X(t) - 1 + 1 - \frac{1}{\mu}\int_0^t (1 - F_X(u))du \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\mu - \int_0^t (1 - F_X(u))du\right) - (1 - F_X(t)) \\
&= \underbrace{\frac{1}{\mu}\int_t^\infty (1 - F_X(u))du}_{d_1(t)} - \underbrace{(1 - F_X(t))}_{d_2(t)}.
\end{aligned}
$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Έχουμε

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{1}{\mu}\int_t^{\infty}(1-F_X(u))du, \quad \geq 0, \text{ φθιν., φραγμ.} \\ d_2(t) &= 1-F_X(t), \quad \geq 0, \text{ φθιν., φραγμ.} \end{aligned}$$

- Θα δείξουμε ότι $\int_0^{\infty}|d(t)|dt < \infty$.
- Είναι

$$\int_0^{\infty}|d(t)|dt \leq \int_0^{\infty} d_1(t)dt + \int_0^{\infty} d_2(t)dt.$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d_1(t)dt &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_t^\infty (1-F_X(u))du\,dt \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_t^\infty \int_u^\infty dF_X(s)\,du\,dt \\
&\overset{0<t\le u<s}{=} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^s \int_0^u dt\,du\,dF_X(s) \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^s u du\,dF_X(s) \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \frac{s^2}{2} dF_X(s) \\
&= \frac{E[X^2]}{2\mu} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}.
\end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Επίσης

$$\int_0^\infty d_2(t)dt = \int_0^\infty (1 - F_X(t))dt = \mu.$$

- Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |d(t)|dt &\leq \int_0^\infty d_1(t)dt + \int_0^\infty d_2(t)dt \\ &= \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} + \mu < \infty. \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- ΒΑΘ εφαρμόσιμο $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(m_X(t)-\frac{t}{\mu}\right) &= \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu} \\
&= \frac{\int_0^\infty d_1(t)dt-\int_0^\infty d_2(t)dt}{\mu} \\
&= \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu^2}-1 \\
&= \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}.
\end{aligned}$$

- Η $m_X(t)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη $\frac{1}{\mu}t+\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$.

Στοχαστική διαδικασία Poisson

Ανανεωτικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

  $$\Updownarrow$$

  $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία
  με $\text{Exp}(\lambda)$ ενδιάμεσους χρόνους.

Ολικός/Μακροσκοπικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

$$\Updownarrow$$

$\{N(t)\}$ σημειακή διαδικασία με

1. ανεξάρτητες προσαυξήσεις,δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,
2. ομογενείς προσαυξήσεις,δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t+s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s,
3. την κατανομή της $N(t)$ να είναι Poisson(λt),δηλαδή

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n \geq 0.$$

Τοπικός/Μικροσκοπικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

$$\Updownarrow$$

$\{N(t)\}$ σημειακή διαδικασία με

1. ανεξάρτητες προσαυξήσεις,
2. ομογενείς προσαυξήσεις,
3. να ισχύει

$$\Pr[N(h)=n] = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h) & \text{αν } n=0, \\ \lambda h + o(h) & \text{αν } n=1, \\ o(h) & \text{αν } n\geq 2, \end{cases}$$

για $h \to 0^+$ (όπου $o(h)$ είναι μια συνάρτηση του h με $\lim_{h\to\ 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$).

Υπέρθεση διαδικασιών Poisson

- $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$, ..., $\{N_r(t)\}$ ανεξ. διαδ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.
- $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους με $N(t) = \sum_{j=1}^{r} N_j(t)$.
- Τότε:
  1. $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$.
  2. Αν Z_k ο τύπος του k-οστού γεγονότος της υπέρθεσης, ($\{Z_k = i\}$ αν το k-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από γεγονός της $\{N_i(t)\}$),τότε
     οι Z_k, $k \geq 1$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και
     $$\Pr[Z_k = i] = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Διάσπαση διαδικασιών Poisson

- $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ.
- $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ. ισόν. με τιμές στο $\{1, 2, \ldots, r\}$ και

$$\Pr[Z_k = i] = p_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

- Έστω $N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{Z_k = i\}}$, $t \geq 0$, $1 \leq i \leq r$.
- Οι $\{N_i(t)\}$, $1 \leq i \leq r$ συνιστούν μια τυχαία διάσπαση της $\{N(t)\}$.
- Τότε:
  Ο $\{N_i(t)\}$, $1 \leq i \leq r$ ανεξ. διαδικασίες Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς λp_i, $1 \leq i \leq r$.

Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων - Διατύπωση

- $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson.
- $S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων.
- Τότε:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}),$$

όπου $U_{i:n}$ η i-οστή διατεταγμένη από n ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $(0, t]$.

Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων - Χρησιμότητα

- Επιτρέπει υπολογισμούς δεσμευμένων πιθανοτήτων της μορφής $\Pr[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in A | N(t) = n]$, καθώς και δεσμευμένων μέσων τιμών της μορφής $E[g(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t) = n]$:

$$
\begin{aligned}
& \Pr[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in A | N(t) = n] \\
= \; & \Pr[(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}) \in A],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& E[g(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t) = n] \\
= \; & E[g((U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}))].
\end{aligned}
$$

Χρήσιμες υπενθυμίσεις διατεταγμένων τ.μ.

- Αν $(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξ. ομοιόμορφες στο $(0, t]$, τότε:

$$
\begin{aligned}
F_{U_{i:n}}(u) &= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^{k} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}, \quad 0 < u \leq t, \\
f_{U_{i:n}}(u) &= \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} \left(\frac{u}{t}\right)^{i-1} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-i}, \\
& \quad 0 < s_i \leq t, \\
E[U_{i:n}] &= \frac{it}{n+1}, \quad 1 \leq i \leq n,
\end{aligned}
$$

$$
f_{(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n \leq t, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}
$$

Βασικά εργαλεία για στοχ. διαδ. Poisson

- Ορισμοί (3).
- Θεωρήματα υπέρθεσης και διάσπασης.
- Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων.