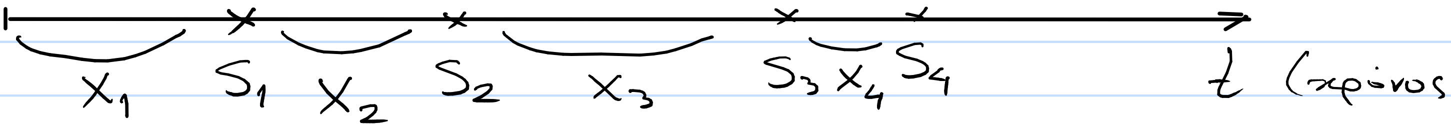
Γενικά:

- 9^{00} – 13^{00} Πέμπτη (3ω Θεωρία + 1ω Ασκήσεις)
- 1 φυλ. ασκ / εβδ ≃ 5 ασκ.
- 11^{00} – 12^{00} Δευ – Τετ. Ώρες γραφείου
- Βιβλίο στην e-class (Ηλεκτρονικό)

① Σημ. διαδ.



② Μίξη τ.μ.

Z μίξη των X, Y ανεξ. με πιθ. p και q

$$\iff \quad Z = IX + (1-I)Y \quad , \quad X, Y, I \text{ ανεξ.}$$

$$\Pr[I=i] = \begin{cases} p, & i=1 \\ q, & i=0. \end{cases}$$

Προσοχή! Άλλο αυτό κι άλλο

η $Z' = pX + qY$

③ Βιβλία για Στοχ. Διαδ.

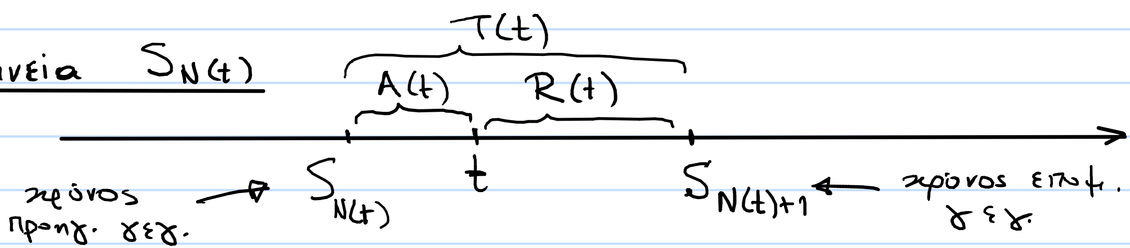
- Kulkarni — Stochastic Modelling
- Tijms — A first course in Stochastic Models
- Ross — Stochastic Processes.

④ Ασκήσεις για 6/10

1.1, 1.3, 1.4 ← Υπολ. Ανανεωτικών Συναρτήσεων

1.5, 1.6 ← Στήσιμο Ανανεωτικών Εξισώσεων + Λύση

⑤ Ερμηνεία $S_{N(t)}$



⑥ Τύποι για την αναν. συνάρτηση

$$m_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t)$$

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}$$

$$m_X(t) = F_X(t) + \underbrace{(m_X * F_X)(t)}_{\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u)}$$

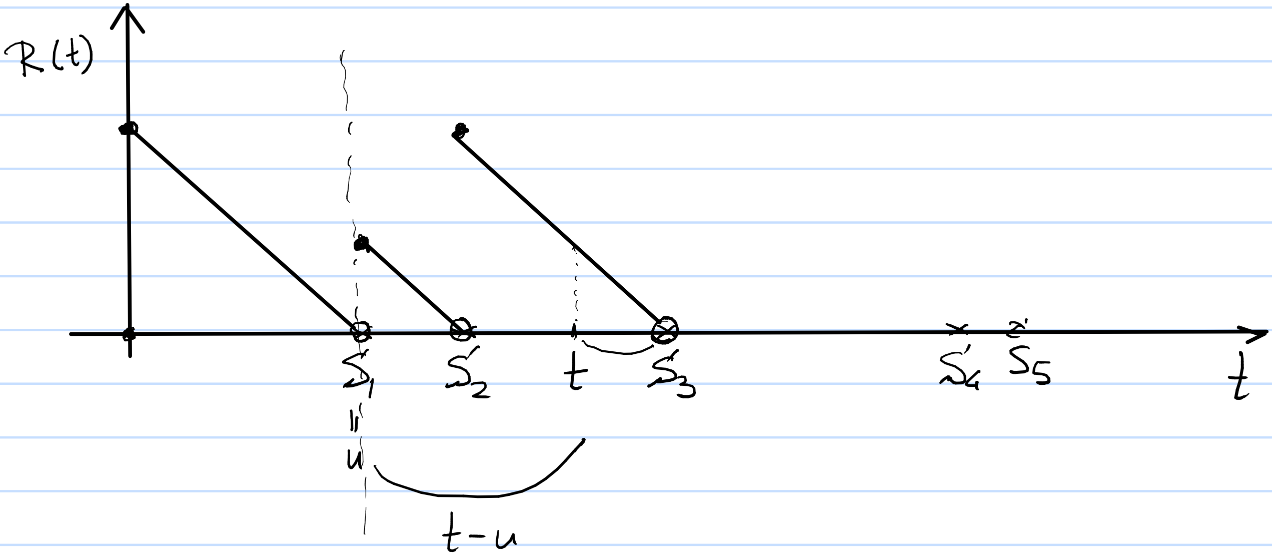
$$\Downarrow$$

$$m_X(t) = F_X(t) + (m_X * F_X)(t)$$

$$\Downarrow$$

$$(m_X * F_X)(t) = m_X(t) - F_X(t)$$

(7) Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης



⑧ $d(t)$ για $E[R(t)]$

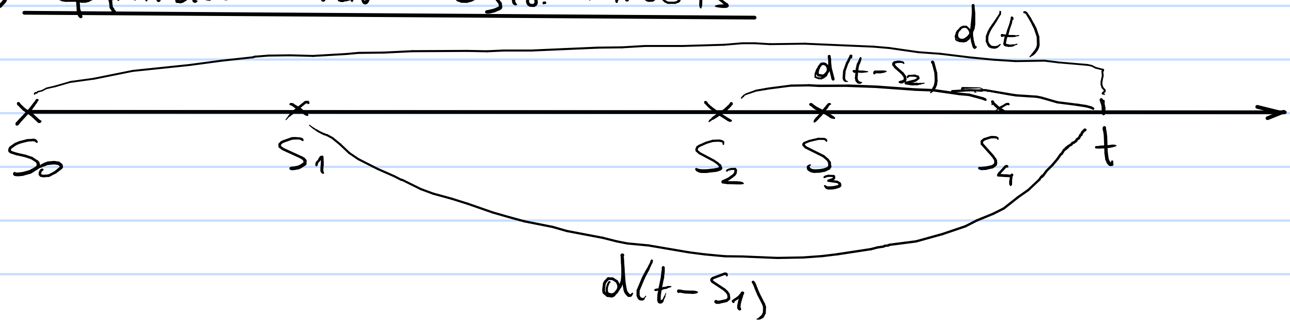
$t < y < u$

$$d(t) = \int_t^\infty (u-t)\, dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy\, dF_X(u)$$

$$= \int_t^\infty \underbrace{\int_y^\infty dF_X(u)}_{= 1 - F_X(y)}\, dy$$

$1 - F_X(y)$.

9 Ερμηνεία αναν. εξισ. + λύσης



10 Λύση αναν. εξισ. για την $m_x(t)$

$$\underbrace{m_x}_{h}(t) = \underbrace{F_x(t)}_{d(t)} + (\underbrace{m_x}_{h} * F_x)(t)$$

$$\Downarrow$$

$$m_x(t) = d(t) + (d * m_x)(t) = F_x(t) + (F_x * m_x)(t)$$

(11) $m(t)$ για $F_X(t) \sim \text{Hyperexpon}(p, \lambda, q, \mu)$

$$F_X(t) = p(1-e^{-\lambda x}) + q(1-e^{-\mu x}), \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F}_X(s) = p \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} + q \cdot \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{\lambda p}{\lambda+s} + \frac{\mu q}{\mu+s}$$

$$= \frac{\lambda p(\mu+s) + \mu q(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s)} = \frac{(\lambda p+\mu q)s + \lambda\mu}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

$$1 - \tilde{F}_X(s) = \frac{s^2 + (\lambda+\mu)s + \cancel{\lambda\mu} - (\lambda p + \mu q)s \cancel{- \lambda\mu}}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

$$= \frac{s^2 + (\lambda q + \mu p)s}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{(\lambda p + \mu q)s + \lambda\mu}{s(s+\lambda q+\mu p)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda q+\mu p}$$

(12) Αντιστροφή

$$\tilde{m}_x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda q + \mu p}$$

$$= A \cdot \frac{1}{s} + \frac{B}{\lambda q + \mu p} \cdot \frac{\lambda q + \mu p}{s + \lambda q + \mu p}$$

$\Downarrow$

$$m_x(t) = A t + \frac{B}{\lambda q + \mu p} \left(1 - e^{-(\lambda q + \mu p) t}\right)$$

(13) **Άσκηση:**

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. τμ. $\sim Uniform([0,1])$.

$m_X(t) = ;\quad 0 \le t \le 1$

Εδώ η μέθοδος των μετασχ. LS αποτυγχάνει:

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^1 e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{-s}}{s}.$$

$$\Rightarrow \tilde{m}_X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s-1-e^{-s}}$$

Εδώ λειτουργεί η αναν. εξίσωση:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)\,dF_X(u)$$

$$= t + \int_0^t m_X(t-u)\,du \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$m_x(t) = t + \int_0^t m_x(\underbrace{t-u}_{x})\,du \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow m_x(t) = t + \int_0^t m_x(x)\,dx \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow m_x'(t) = 1 + m_x(t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow m_x'(t) - m_x(t) = 1 \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow e^{-t} m_x'(t) - e^{-t} m_x(t) = e^{-t} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-t} m_x(t)\right) = e^{-t} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow e^{-t} m_x(t) = \int_0^t e^{-u}\,du = 1 - e^{-t} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow m_x(t) = e^t - 1 \quad , \quad 0 \le t \le 1.$$