Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα Μέρος 4 Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Αντώνης Οικονόμου

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

22/11/2022-

Εισαγωγή στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Η έννοια του αποθέματος

- Απόθεμα
  = Ποσότητα ενός αγαθού που αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση.

Σχήμα: Απόθεμα

Πλεονεκτήματα αποθεμάτων

- Οικονομίες κλίμακας: Το μέσο κόστος ανά προϊόν είναι συνήθως φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας.
- Εξομάλυνση παραγωγής: Όταν υπάρχουν έντονες εποχιακές διακυμάνσεις, είναι βολικό η παραγωγή να γίνεται σταδιακά σε όλη τη διάρκεια του χρόνου.
- Αντιμετώπιση αβεβαιότητας: Η ύπαρξη αβεβαιότητας στη ζήτηση ή στην προσφορά μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητες ελλείψεις.
- Διακυμάνσεις στα κόστη: Τα κόστη παραγωγής και πρώτων υλών μπορούν να επιφέρουν άμεση αναπροσαρμογή τιμών των προϊόντων.

Μειονεκτήματα αποθεμάτων

- Κόστη δημιουργίας/ενοικίασης αποθηκευτικών χώρων.
- Λειτουργικά κόστη αποθηκών.
- Απώλειες προϊόντων λόγω φθοράς, απαξίωσης.
- Κόστος δεσμευμένου κεφαλαίου.

Κατηγορίες προβλημάτων διαχείρισης αποθεμάτων

- Ως προς την παρακολούθηση του αποθέματος:
  - Συνεχούς παρακολούθησης.
  - Περιοδικής παρακολούθησης (επιθεώρησης).
- Ως προς την αβεβαιότητα:
  - Ντετερμινιστικά.
  - Στοχαστικά.
- Ως προς τη δομή του συστήματος παραγωγής/αποθήκευσης:
  - Απλά συστήματα.
  - Σειριακά συστήματα.
  - Γενικά συστήματα.
- Ως προς τις ελλείψεις:
  - Όταν υπάρχουν ελλείψεις, αυτές καταγράφονται σε εκκρεμότητα (backlog) και ικανοποιούνται όταν αναπληρωθεί το απόθεμα.
  - Όταν υπάρχουν ελλείψεις, αυτές χάνονται.

Το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας

- Γνωστό ως EOQ model (Economic Order Quantity model).
- Ντετερμινιστικό μοντέλο.
- Απλό μοντέλο με εφαρμογές για προϊόντα μαζικής κατανάλωσης και μεγάλου όγκου πωλήσεων.
- Η ζήτηση δεν παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις.
- Εστιάζει στην αλληλεπίδραση δυο παραγόντων: οικονομιών κλίμακας και κόστους αποθήκευσης.

Το EOQ μοντέλο: Περιγραφή

- Μοντέλο συνεχούς παρακολούθησης (επιθεώρησης).
- Ζήτηση γνωστή και σταθερή.
- Το προϊόν αγοράζεται και πωλείται σε συνεχείς ποσότητες.
- Οι παραγγελίες μπορούν να γίνουν οποτεδήποτε και σε οποιαδήποτε ποσότητα, μη μηδενικό χρόνο παράδοσης.
- Στο βασικό μοντέλο, οι ελλείψεις δεν επιτρέπονται, καθώς η ζήτηση είναι γνωστή και μπορούν να αποφευχθούν εκτός κι αν είναι επιθυμητές.

Το EOQ μοντέλο: Παράμετροι - Αποφάσεις - Αντικειμενική συνάρτηση

- Παράμετροι:
  - a: Ρυθμός ζήτησης (ζήτηση ανά μονάδα χρόνου).
  - K: Πάγιο κόστος ανά παραγγελία.
  - c: Κόστος ανά κομμάτι παραγγελίας.
  - h: Κόστος αποθήκευσης ανά κομμάτι και χρονική μονάδα.
- Αποφάσεις:
  - Q: Ποσότητα παραγγελίας.
  - Αφού η παράδοση των παραγγελιών είναι άμεση, οι παραγγελίες τίθενται όταν τελειώσει το απόθεμα.
- Στόχος:
  - Ελαχιστοποίηση μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

Το EOQ μοντέλο: Ανάλυση

- Κάθε φορά που γίνεται παραγγελία το σύστημα βρίσκεται στην ίδια ακριβώς στην ίδια κατάσταση (μηδενικό απόθεμα, άπειρος ορίζοντας, σταθερός ρυθμός ζήτησης και σταθερά κόστη) $\rightarrow$ Στάσιμη πολιτική.
- Ποσότητα παραγγελίας Q, κάθε φορά που μηδενίζεται το απόθεμα.
- Διάστημα μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών $T = Q/a$.
- Ύψος αποθέματος t χρονικές μονάδες μετά την παραλαβή της τελευταίας παραγγελίας: $Q - at$, $t \in [0, \frac{Q}{a})$.
- Συνολικό κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$K + cQ + h\int_0^{Q/a}(Q - at)dt = K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}.$$

Το EOQ μοντέλο: Ανάλυση (συνέχεια)

- Μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα:

$$C(Q) = \frac{K + cQ + hQ^2/(2a)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}.$$

- Η $C(Q)$ είναι κυρτή ως προς Q και ελαχιστοποιείται όταν $C'(Q) = 0 \to$ Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

(ποσότητα οικονομικής ποσότητας παραγγελίας).

- Διάστημα μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών, ελάχιστη τιμή κόστους:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}, \quad C^* = C(Q^*) = \sqrt{2aKh}.$$

Το EOQ μοντέλο με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης

- Εδώ ο χρόνος παράδοσης είναι μη-μηδενικός, ντετερμινιστικός, ίσος με L.
- Οι άλλες υποθέσεις του EOQ μοντέλου ισχύουν.
- Βασική διαφορά με κλασικό EOQ: Οι στιγμές παραγγελίας και άφιξης νέων ποσοτήτων δεν συμπίπτουν.
- Οι παραγγελίες πρέπει να γίνονται ώστε οι αφίξεις ποσοτήτων να γίνονται μόνο σε στιγμές μηδενισμού αποθέματος.
- Ζήτηση με ρυθμό $a \to$ Ποσότητα που θα πωληθεί κατά τη διάρκεια του L είναι $R = aL$.
- Επομένως, η παραγγελία πρέπει να γίνει όταν το επίπεδο αποθέματος είναι R (σημείο αναπαραγγελίας - reorder point).

Το EOQ μοντέλο με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης - βέλτιστη πολιτική

- Η βέλτιστη πολιτική υπαγορεύει:
  Όταν η στάθμη του αποθέματος πέσει στο επίπεδο
  $$R = aL$$
  τότε γίνεται παραγγελία
  $$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}.$$
  (πολιτική τύπου (R, Q)).
- Οι πολιτικές τύπου (R, Q) χρησιμοποιούνται σε γενικότερα προβλήματα ελέγχου αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα.
- Εδώ οι παράμετροι R και Q υπολογίζονται ανεξάρτητα, αλλά αυτό δεν συμβαίνει σε γενικότερα προβλήματα.
-

Το EOQ μοντέλο με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης - βέλτιστη πολιτική

- Η πολιτική που περιγράψαμε εφαρμόζεται όταν $R \leq Q^*$.
- Γενικά, έχοντας υπολογίσει το Q^* και το αντίστοιχο μήκος κύκλου $T^* = Q^*/a$, το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας είναι

$$R = a\left(L - T^* \left\lfloor \frac{L}{T^*} \right\rfloor\right) = aL - Q^* \left\lfloor \frac{aL}{Q^*} \right\rfloor .$$

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις

- Θεωρούμε το βασικό EOQ μοντέλο με $L = 0$.
- Μια από τις υποθέσεις του μοντέλου είναι ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις.
- Αυτό είναι εφικτό λόγω της ντετερμινιστικής ζήτησης και των άμεσων παραλαβών.
- Είναι όμως πιθανό σε κάποιες εφαρμογές να είναι επιθυμητό ένα μέρος της ζήτησης να ικανοποιείται όχι άμεσα αλλά από επόμενες παραγγελίες (εκκρεμότητες backlog).

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις

- Παράμετροι:
  - a, K, c, h: Παράμετροι όπως στο βασικό EOQ μοντέλο.
  - p: Κόστος έλλειψης ανά κομμάτι και χρονική μονάδα για τις παραγγελίες σε εκκρεμότητα.
- Αποφάσεις:
  - Q: Ποσότητα παραγγελίας.
  - x: Ποσοστό ζήτησης που ικανοποιείται άμεσα χωρίς να μπαίνει σε εκκρεμότητα.
- Στόχος:
  - Ελαχιστοποίηση μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Στη διάρκεια ενός διαστήματος στο οποίο η συνολική ζήτηση είναι Q, οι ποσότητες που ικανοποιούνται άμεσα και μέσω εκκρεμοτήτων είναι αντίστοιχα

$$S = Qx, \quad B = Q(1-x).$$

- Η πολιτική υλοποιείται ως εξής:
  - Όταν μηδενιστεί το απόθεμα η εισερχόμενη ζήτηση μπαίνει σε εκκρεμότητα.
  - Όταν οι εκκρεμότητες (backlog) φθάσουν σε επίπεδο B γίνεται παραγγελία ύψους Q που παραδίδεται αμέσως.
  - B μονάδες ικανοποιούν αμέσως στους πελάτες σε εκκρεμότητα.
  - S μονάδες αποθηκεύονται.

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Διάστημα μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών $T = Q/a$
- Διάστημα ικανοποίησης ζήτησης από το απόθεμα S/a.
- Διάστημα που η ζήτηση τίθεται σε εκκρεμότητα B/a
- Το απόθεμα μειώνεται γραμμικά στο πρώτο διάστημα και το backlog αυξάνεται γραμμικά στο δεύτερο.

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$h\int_0^{S/a}(S-at)dt = h\left(S\frac{S}{a} - a\frac{(S/a)^2}{2}\right) = \frac{hS^2}{2a} = \frac{hQ^2x^2}{2a}.$$

- Κόστος έλλειψης σε έναν κύκλο:

$$p\int_0^{B/a} atdt = pa\frac{B^2}{2a^2} = \frac{pB^2}{2a} = \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}.$$

- Συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}.$$

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου:

$$C(Q,x) = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g(x)Q}{2},$$

όπου

$$g(x) = hx^2 + p(1-x)^2.$$

- Για $x = 1$ έχουμε $g(1) = h$ και επομένως η $C(Q,1)$ είναι η συνάρτηση κόστους στο μοντέλο χωρίς ελλείψεις.
- Για κάθε Q, η $C(Q,x)$ ελαχιστοποιείται ως προς x όταν ελαχιστοποιείται η $g(x)$.

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις

- Έχουμε $g(x) = hx^2 + p(1-x)^2$, οπότε $g'(x) = 0$ δίνει:
  - Βέλτιστη τιμή του x:
$$x^* = \frac{p}{h+p}.$$
  - Ελάχιστη τιμή της $g(x)$:
$$g^* = g(x^*) = \frac{hp}{h+p}.$$
- Αντικαθιστώντας την $g(x)$ με τη βέλτιστη τιμή g^* στη συνάρτηση κόστους, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση
$$\tilde{C}(Q) = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g^*Q}{2}.$$
- Αυτή είναι η συνάρτηση μέσου κόστους στο κλασικό EOQ μοντέλο με μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης g^*.

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Βέλτιστη πολιτική

- Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{g^*}} = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

- Διάρκεια κύκλου υπό τη βέλτιστη πολιτική:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{2K}{ah}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

- Μέγιστη τιμή αποθέματος, backlog:

$$S^* = Q^* x^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}, \quad B^* = Q^*(1-x^*) = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

Το EOQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Παρατηρήσεις - συμπεράσματα

- Ελάχιστη τιμή κόστους ανά μονάδα χρόνου

$$C^* = C(Q^*, x^*) = \tilde{C}(Q^*) = \sqrt{2Kag^*} = \sqrt{\frac{2aKhp}{p+h}}.$$

- Η βέλτιστη πολιτική είναι να γίνονται παραγγελίες ύψους Q^* όταν η στάθμη του backlog φτάσει την τιμή B^*.
- Ισχύει:

$$S^* < \sqrt{\frac{2aK}{h}} < Q^*, \quad C^* < \sqrt{2aKh}$$

δηλαδή το κόστος ανά χρονική μονάδα είναι λιγότερο από το κλασικό EOQ μοντέλο που απαγορεύονται οι ελλείψεις.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Πλαίσιο

- Η ζήτηση είναι μια στοχαστική διαδικασία $\{D(t), t \geq 0\}$. $D(t)$: συνολική ζήτηση στο διάστημα $[0, t]$.
- L: Χρόνος καθυστέρησης παράδοσης, γνωστός και σταθερός.
- Η παρακολούθηση του αποθέματος μπορεί να είναι συνεχής ή περιοδική.
- Όταν η ζήτηση είναι στοχαστική, πρέπει εκτός από το απόθεμα, να καταγράφονται οι παραγγελίες που είναι σε εξέλιξη και οι τυχόν εκκρεμότητες.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Μεταβλητές

- $I(t)$: ποσότητα προϊόντος στην αποθήκη (stock-on-hand) τη χρονική στιγμή t.
- $B(t)$: ποσότητα προϊόντος σε εκκρεμότητα προς τους πελάτες (backlog) τη χρονική στιγμή t.
- $IO(t)$: ποσότητα προϊόντος που βρίσκεται καθ' οδόν προς την αποθήκη από προηγούμενες παραγγελίες (incoming orders) τη χρονική στιγμή t.
- $IL(t) = I(t) - B(t)$: επίπεδο αποθέματος (inventory level) τη χρονική στιγμή t.
- $IP(t) = I(t) - B(t) + IO(t) = IL(t) + IO(t)$: θέση αποθέματος (inventory position) τη χρονική στιγμή t.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Μεταβλητές

- Οι ποσότητες $I(t), B(t), IO(t)$ είναι μη αρνητικές.
- Οι $IL(t)$ και $IP(t)$ μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές.
- Κατά κανόνα δεν υπάρχουν ταυτόχρονα προϊόν στην αποθήκη και εκκρεμότητες προς τους πελάτες:
  $I(t)B(t) = 0$ για $t \geq 0$.
  Τότε:
  $I(t) = \max(IL(t), 0)$ και
  $B(t) = -\min(IL(t), 0)$.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Η μεταβλητή της θέσης αποθέματος

- Η μεταβλητή της θέσης αποθέματος, $IP(t)$ είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού δίνει πληροφορία και για το απόθεμα στην αποθήκη, και για τις εκκρεμότητες και για τις παραγγελίες σε εξέλιξη.
- Οι περισσότερες πολιτικές βασίζονται σε αυτήν για το πότε πρέπει να γίνονται παραγγελίες.
- Όταν $L = 0$, τότε $IO(t) = 0$ και $IP(t) = IL(t)$.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Πολιτικές (R, Q)

- Σε μια πολιτική παραγγελιών της κλάσης (R, Q) οι παραγγελίες γίνονται πάντα σε πολλαπλάσια της ποσότητας Q.
- Όταν η θέση αποθέματος πέσει στο επίπεδο R ή κάτω από αυτό γίνεται παραγγελία του ελάχιστου πολλαπλάσιου της ποσότητας Q που θα επαναφέρει τη θέση αποθέματος σε μια τιμή αυστηρά μεγαλύτερη του R.
- Αν τη χρονική στιγμή t ισχύει $IP(t) \leq R$, τότε γίνεται παραγγελία ύψους nQ όπου $n = \min\{k \in \mathbb{N} : IP(t) + kQ > R\}$.

Έλεγχος αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα: Πολιτικές (s, S)

- Σε μια πολιτική παραγγελιών της κλάσης (s, S) η ποσότητα παραγγελίας προσδιορίζεται έτσι ώστε η θέση αποθέματος να επανέλθει σε ένα καθορισμένο επίπεδο.
- Όταν η θέση αποθέματος πέσει στο επίπεδο s ή κάτω από αυτό γίνεται παραγγελία τόσης ποσότητας έτσι ώστε η θέση αποθέματος να επανέλθει στη θέση S.
- Αν τη χρονική στιγμή t ισχύει $IP(t) \leq R$, τότε γίνεται παραγγελία ύψους $S - IP(t)$.

Βασικά μοντέλα με στοχαστική ζήτηση

Βασικά μοντέλα με στοχαστική ζήτηση

- Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος.
- Το μοντέλο περιοδικής παρακολούθησης μιας περιόδου (μοντέλο εφημεριδοπώλη).
- Το μοντέλο περιοδικής παρακολούθησης πολλών περιόδων.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος: Παράμετροι

- Μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων με συνεχή παρακολούθηση, στο οποίο εφαρμόζεται πολιτική (Q, R).
- K: Σταθερό κόστος ανά παραγγελία.
- c: Κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος.
- h: Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα.
- p: Κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα.
- L: Χρόνος καθυστέρησης παράδοσης παραγγελίας.
- Η ζήτηση ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με σταθερή τιμή a ανά χρονική μονάδα.
- Το μοντέλο είναι στοχαστικό ανάλογο του EOQ μοντέλου.

Το μοντέλο (Q,R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Περιγραφή

- Υποθέτουμε το μοντέλο (Q,R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με τις επιπλέον υποθέσεις:
  - Η ζήτηση φθάνει σε διακριτές μονάδες σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων Poisson $\{D(t) : t \geq 0\}$, με ρυθμό a.
  - Κάθε άφιξη αντιστοιχεί ζήτηση μιας μονάδας προϊόντος.
  - $D(t,u] = D(u) - D(t)$: Η ζήτηση στο διάστημα $(t,u]$.
  - Η $D(t,u]$ είναι τ.μ. Poisson με μέση τιμή $a(u-t)$.
  - Η πολιτική είναι τύπου (Q,R), όπου οι Q, R είναι ακέραιοι.
- Στόχος: Εύρεση ακέραιων τιμών των Q, R, ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος παραγγελίας, αποθήκευσης και ελλείψεων ανά χρονική μονάδα, σε άπειρο ορίζοντα, $C(Q,R)$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση

- Το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα $C(Q, R)$ αναλύεται σε
  - Μέσο πάγιο κόστος: $\frac{Ka}{Q}$ (αφού η παραγγελία έχει μέγεθος Q, το επιμερισμένο πάγιο κόστος ανά μονάδα προϊόντος θα είναι $\frac{K}{Q}$ και πρέπει να παραγγέλονται a μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα για να καλύπτεται η ζήτηση).
  - Κόστος αγοράς/παραγωγής: ca.
  - Κόστος αποθήκευσης, ελλείψεων:

$$h \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{t=0}^{T} I(t)dt}{T} = hE[I], \quad p \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{t=0}^{T} B(t)dt}{T} = pE[B]$$

όπου I, B τυχαίες μεταβλητές με τις στάσιμες κατανομές του αποθέματος, των ελλείψεων.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση

- Συνάρτηση κόστους:

$$C(Q, R) = \frac{Ka}{Q} + ca + hE[I] + pE[B].$$

- Το σύνολο στο οποίο θα γίνει η βελτιστοποίηση του $C(Q, R)$ θα είναι το

$$\{(Q, R) : Q \geq 1, R \geq -Q\}.$$

Το $Q \leq 1$ γιατί προφανώς δεν έχει νόημα η παραγγελία να είναι μηδενική.
Το επίπεδο αναπαραγγελίας R μπορεί να είναι αρνητικό, αλλά το επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας θα πρέπει να είναι μη-αρνητικό, αλλιώς θα παραμένει πάντα αρνητικό. Άρα $R + Q \geq 0$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R)$$

με

$$C(Q, R) = \frac{Ka}{Q} + ca + hE[I] + pE[B].$$

- Για τον υπολογισμό των $E[I]$ και $E[B]$ θα δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{IP(t), t \geq 0\}$ της θέσης αποθέματος είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, με στάσιμη κατανομή απλής μορφής.
- Μέσω αυτής θα υπολογιστούν οι στάσιμες κατανομές των διαδικασιών $\{I(t)\}$ και $\{B(t)\}$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $IP(t)$

- Για τη στοχαστική διαδικασία $\{IP(t), t \geq 0\}$, ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο όλων των ακεραίων (ανάλογα με τα αρχικά αποθέματα, εκκρεμότητες και εισερχόμενες παραγγελίες).
- Η θέση αποθέματος μειώνεται κατά μια μονάδα σε κάθε χρονική μονάδα άφιξης ζήτησης t, εκτός κι αν $IP(t^-) = R + 1$, οπότε γίνεται αναπαραγγελία.
- Παρόλο που η ποσότητα Q θα έρθει στην αποθήκη τη χρονική στιγμή $t + L$, κατά τη χρονική στιγμή t προστίθεται στις εισερχόμενες ποσότητες $IO(t)$ και στη θέση αποθέματος $IP(t)$, επομένως η θέση αποθέματος παίρνει αμέσως την τιμή $R + Q$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $IP(t)$

- Επομένως, η θέση αποθέματος $\{IP(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ.
  - με χώρο καταστάσεων $\mathbb{Z}$,
  - μια επαναληπτική κλάση $\{R+1, R+2, \ldots, R+Q\}$, και
  - ρυθμούς

$$q_{ij} = \begin{cases} a, & i = R+2, \ldots, R+Q, j = i-1 \\ a, & i = R+1, j = R+Q \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Η κατανομή ισορροπίας της είναι διακριτή ομοιόμορφη:

$$p_i = \frac{1}{Q}, i = R+1, \ldots, R+Q.$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $IL(t)$

- Για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους χρειαζόμαστε τις κατανομές ισορροπίας των $\{I(t)\}$ (απόθεμα) και $\{B(t)\}$ (εκκρεμότητες).
- Αυτές προκύπτουν από την κατανομή ισορροπίας της $\{IP(t)\}$, (p_i).
- Σύγκριση σε στιγμές t και $t+L$:

  $$IL(t+L) = IL(t)+IO(t)-D(t,t+L] = IP(t)-D(t,t+L].$$

- Επομένως, για τις αντίστοιχες κατανομες ισορροπίας, ισχύει:

  $$IL = IP - D,$$

  με $IP \sim \text{Uniform}(\{R+1,\ldots,R+Q\})$,
  και $D \sim \text{Poisson}(aL)$, ανεξάρτητη της IP.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- Υπολογισμός $E[B]$:

$$\begin{aligned} B(t+L) &= \max(-IL(t+L), 0) \\ &= \max(D(t, t+L] - IP(t), 0) \\ \Rightarrow \quad E[B] &= E[\max(D - IP), 0]. \end{aligned}$$

- Δεσμεύοντας στην τιμή της IP:

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} E[\max(D - s, 0)] = \frac{1}{Q} G(s),$$

με $G(s)$ τη συνάρτηση απώλειας πρώτης τάξης της D (μέση υπέρβαση της D πάνω από το επίπεδο s).

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- $G(s)$ είναι το μέσο επίπεδο εκκρεμοτήτων (backlog), όταν η θέση αποθέματος παραμένει σταθερή ($IP = s$).
- Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με μια πολιτική $(Q, R) = (1, s-1)$, δηλαδή να παραγγέλνεται μια μονάδα κάθε φορά που έρχεται μια μονάδα ζήτησης (πολιτική αποθέματος βάσης s).

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- Γενικά έχουμε:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= E[\max(D-s,0)] = \sum_{k=0}^{\infty} P[\max(D-s,0)>k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P[D-s>k] = \sum_{k=0}^{\infty} P[D>s+k] \\
&= \sum_{j=s}^{\infty} P[D>j] = E[D] - \sum_{j=0}^{s-1} P(D>j) \\
&= aL - \sum_{j=0}^{s-1}(1-F(j)) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j),
\end{aligned}
$$

όπου $F(j) = P[D \leq j] = \sum_{k=0}^{j} e^{-aL}\frac{(aL)^j}{j!}$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[B]$

- Άρα για μια πολιτική αποθέματος βάσης s (ισοδύναμα πολιτική $(Q, R) = (1, s-1)$, η μέση τιμή των εκκρεμοτήτων είναι:

$$\bar{B}(s) = G(s) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

- Γενικότερα για μια γενική πολιτική (Q, R), η μέση τιμή των εκκρεμοτήτων είναι:

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{B}(s).$$

Το μοντέλο (Q,R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[I]$

- Υπολογισμός $E[I]$:

$$\begin{aligned} I(t+L) &= \max(IL(t+L),0) \\ &= \max(IP(t)-D(t,t+L],0) \\ \Rightarrow \quad E[I] &= E[\max(IP-D),0]. \end{aligned}$$

- Δεσμεύοντας στην τιμή της IP:

$$E[I] = \frac{1}{Q}\sum_{s=R+1}^{R+Q} E[\max(s-D,0)] = \frac{1}{Q}\bar{I}(s),$$

με $\bar{I}(s) = E[\max(s-D,0)]$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[I]$

- Από τη σχέση $IL(t) = I(t) - B(t)$, έχουμε

$$\bar{I}(s) = E[IL] + \bar{B}(s).$$

- Επίσης, έχουμε $IL = IP - D$ $E[IL] = E[IP] - E[D]$.
- Όμοια με την $G(s)$ παίρνουμε

$$\bar{I}(s) \quad = \quad E[\max(s - D, 0] = s - aL + \bar{B}(s) = \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Ανάλυση $E[I]$

- Άρα για μια πολιτική αποθέματος βάσης s (ισοδύναμα πολιτική $(Q, R) = (1, s-1)$, η μέση τιμή του αποθέματος είναι:

$$\bar{I}(s) = \sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

- Γενικότερα για μια γενική πολιτική (Q, R), η μέση τιμή του αποθέματος είναι:

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{I}(s).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση μέσου κόστους:

$$C(Q,R) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)\right),$$

όπου

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h+p)\sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

- Η ποσότητα $C(s)$ είναι το μέσο κόστος αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα, κάτω από την πολιτική αποθέματος βάσης s.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $C(Q, R)$ μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων:

$$C^* = \inf_{Q\geq 1, R\geq -Q} C(Q, R) = \inf_{Q\geq 1} C^*(Q)$$

όπου

$$C^*(Q) = \inf_{R\geq -Q} C(Q, R) = ca + \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{Q} \inf_{R\geq -Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s).$$

- Για το δεύτερο στάδιο, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί ως προς R το

$$\sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Η συνάρτηση $C(s)$ με

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h+p)\sum_{j=0}^{s-1} F(j).$$

είναι κυρτή, αφού

$$C(s+1) - C(s) = -p + (h+p)F(s),$$

που είναι αύξουσα ως προς s.

- Άρα η $C(s)$ ελαχιστοποιείται για $s = s^*$, όπου

$$s^* = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{p}{h+p}\right\}. \tag{1}$$

Το μοντέλο (Q,R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q,R)$

- Για οποιοδήποτε Q, το $\sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)$ έχει ελάχιστη τιμή ως προς R.
- Οι όροι του ελάχιστου αθροίσματος είναι οι Q κατά σειρά μικρότερες τιμές της $C(s)$, έστω $C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots, C_{(Q)}$, οι οποίες προκύπτουν όταν το s μεταβάλλεται σε ένα διάστημα $\{R^*(Q)+1, \ldots, R^*(Q)+Q\}$.Επομένως

$$\begin{aligned} C^*(Q) &= ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)}\right) \\ &= ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{s=R^*(Q)+1}^{R^*(Q)+Q} C(s)\right). \end{aligned}$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Το $R^*(Q)$ είναι το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας για ποσότητα παραγγελίας Q.
- Αναδρομικό σχήμα για $R^*(Q)$, $Q = 1, 2, \ldots$:
  1. Για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* - 1$.
  2. Έστω $R^*(Q)$ η βέλτιστη τιμή του R για Q. Τότε οι $C(R^*(Q) + 1), \ldots, C(R^*(Q) + Q)$ είναι οι Q ελάχιστες τιμές της $C(s), s \in \mathbb{Z}$. Για $Q + 1$, λόγω της κυρτότητας της $C(s)$, η επόμενη αμέσως μεγαλύτερη τιμή της $C(s)$ θα είναι μια από τις $C(R^*(Q))$ και $C(R^*(Q) + Q + 1)$. Στην πρώτη περίπτωση το επίπεδο αναπαραγγελίας θα μειωθεί κατά μια μονάδα, ενώ στη δεύτερη θα παραμείνει το ίδιο όπως πριν:

$$R^*(Q+1) = \begin{cases} R^*(Q) - 1, & \text{αν } \; C(R^*(Q)) \leq C(R^*(Q) + Q + 1) \\ R^*(Q), & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Το επίπεδο αναπαραγγελίας είναι φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q, αφού $R^*(Q+1) \leq R^*(Q)$.
- Επίσης, για κάθε αύξηση του Q κατά μια μονάδα το $R^*(Q)$ μειώνεται κατά μια μονάδα ή παραμένει το ίδιο, ενώ για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* > -1$.
- Επομένως $R^*(Q) \geq -Q$ για κάθε τιμή του Q.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Για το πρώτο στάδιο βελτιστοποίησης,

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R) = \inf_{Q \geq 1} C^*(Q),$$

βλέπουμε ότι

$$C^*(Q+1) - C^*(Q) = \frac{w(Q) - Ka}{Q(Q+1)},$$

όπου

$$w(Q) = QC_{(Q+1)} - \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)} = \sum_{j=1}^{Q} (C_{(Q+1)} - C_{(j)}).$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: $C(Q, R)$

- Έχουμε: $w(Q+1) - w(Q) = (Q+1)(C_{(Q+2)} - C_{(Q+1)})$.
- $C_{(j)} \uparrow j \Rightarrow w(Q) \uparrow Q$.
- Επομένως, αν $C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0$ για κάποιο Q, τότε $C^*(Q'+1) - C^*(Q') > 0$ για κάθε $Q' \geq Q$.
- Συνεπώς, η βέλτιστη τιμή του Q είναι η μικρότερη τιμή για την οποία η διαφορά γίνεται θετική:

$$\begin{aligned} Q^* &= \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} \\ &= \inf\{Q \geq 1 : w(Q) > Ka\}. \end{aligned}$$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων.
- Προϊόν με ζήτηση Poisson με ρυθμό $a = 3$ μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου.
- Χρόνος καθυστέρησης παραγγελίας $L = 2$.
- Σταθερό κόστος παραγγελίας $K = 2$.
- Κόστη αποθήκευσης και ελλείψεων $h = 1$ και $p = 2$, αντίστοιχα, ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου.
- Να υπολογιστεί η βέλτιστη πολιτική τύπου (Q, R).

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Υπολογίζουμε πρώτα τη βέλτιστη πολιτική αποθέματος βάσης s^*:

$$s^* = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{p}{h+p}\right\} = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{2}{3}\right\},$$

  όπου $F(s)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Ποισσον με παράμετρο $aL = 6$.
- Υπολογίζοντας τις τιμές της $F(s)$ παίρνουμε $F(6) = 0.606$ και $F(7) = 0.744$. Επομένως $s^* = 7$.
- Επομένως, για παραγγελία $Q = 1$ μονάδας προϊόντος το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας είναι το $R^*(1) = 6$.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Υπολογίζουμε τώρα την $C(s)$, χρησιμοποιώντας την

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h + p)\sum_{j=0}^{s-1} F(j)$$

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C(s)$	8.06	6.25	4.70	3.55	2.89	2.71	2.94	3.48	4.23

- Από τον πίνακα έχουμε τις 9 ελάχιστες τιμές της $C(s)$: $C_{(1)} = C(7) = 2.71, C_{(2)} = C(6) = 2.89, C_{(3)} = C(8) = 2.94, \ldots, C_{(9)} = C(1) = 8.06.$

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

- Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας υπολογίζεται από την

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\},$$

αφού πρώτα υπολογιστούν οι τιμές της $C^*Q)$ από την

$$C^*(Q) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)}\right),$$

για διαδοχικές τιμές του Q μέχρι την πρώτη τιμή που ικανοποιεί τη συνθήκη τερματισμού.

Το μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με ζήτηση Poisson: Παράδειγμα

Q	1	2	3	4	5	6	7
$C^*(Q)$	8.71	5.80	4.85	4.51	4.32	4.30	4.36

- Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} = 6.$$

- Το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας $R^*(Q^*) = R^*(6)$ βρίσκεται από το αναδρομικό σχήμα.
- Ισοδύναμα, από τον πίνακα των $C(s)$ έχουμε ότι οι 6 ελάχιστες τιμές της $C(s)$, αντιστοιχούν στις $C(5), \ldots, C(10)$. Δηλαδή: $R^*(6) + 1 = 5$ και $R^*(6) = 4$.
- Η βέλτιστη (Q, R) πολιτική είναι $(Q^*, R^*) = (6, 4)$: Όταν η θέση αποθέματος φτάνει τη στάθμη 4 να γίνεται παραγγελία 6 μονάδων προϊόντος.

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Σκοπός

- Αναφέρεται στην επιλογή βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας ενός προϊόντος για μια περίοδο, που απαξιώνεται στο τέλος της περιόδου.
- Κατάλληλο για προϊόντα με μικρή διάρκεια ζωής, όπως εφημερίδες, λουλούδια, φρέσκα προϊόντα διατροφής.
- Τα προϊόντα που μένουν απούλητα απαξιώνονται γρήγορα και δεν μπορούν να πωληθούν στην επόμενη περίοδο. Μπορούν, ίσως, να επιστραφούν ή να εκποιηθούν σε κάποια τιμή ευκαιρίας.

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Περιγραφή

- 1 προϊόν.
- Προγραμματισμός για 1 περίοδο.
- Απόθεμα στην αποθήκη: x.
- Απόφαση - ποσότητα παραγγελίας: a.
- Απόθεμα μετά την παραλαβή: $x + a$.
- Ζήτηση επόμενης περιόδου: $D \sim F_D(x)$ (συνεχής τ.μ.).
- Πάγιο κόστος παραγγελίας: K.
- Κόστος αγοράς ανά μονάδα: c.
- Κόστος πλεονάσματος ανά μονάδα: h.
- Κόστος έλλειψης ανά μονάδα: p.
- Βασική υπόθεση: $p > c$ (αλλιώς η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίησή του, οπότε δεν παραγγέλνουμε τίποτα).

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Βέλτιστη πολιτική

- Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη είναι τύπου (s, S), δηλαδή θα πρέπει να παραγγέλνει ώστε να φθάσει σε επίπεδο αποθέματος S, αν το αρχικό απόθεμα του είναι κάτω από s, δηλαδή,

$$a^*(x) = \begin{cases} S - x, & \text{αν } x < s, \\ 0, & \text{αν } x \geq s. \end{cases}$$

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Βέλτιστη πολιτική

- Οι παράμετροι της βέλτιστης πολιτικής υπολογίζονται ως εξής:

$$S = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+h}\right)$$

και το s είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$cs + l(s) = K + cS + l(S),$$

με

$$\begin{aligned} l(y) &= hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] \\ &= h\int_0^y (y-\xi) f_D(\xi)d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση

- Αν ληφθεί η απόφαση να παραγγελθούν a προϊόντα και το επίπεδο του αποθέματος να είναι $y = x + a$, τότε το αναμενόμενο κόστος είναι

$$\begin{aligned} c(x,a) &= \begin{cases} K + ca + l(x+a) & \text{αν } a > 0, \\ l(x) & \text{αν } a = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} K + cy + l(y) - cx & \text{αν } y > x, \\ l(x) & \text{αν } y = x, \end{cases} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} l(y) &= hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] \\ &= h\int_0^y (y-\xi) f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση

- Η $l(y)$ είναι κυρτή ως προς y.
- Πράγματι:
  - Για κάθε σταθερό d, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $(y-d)^+$ και $(y-d)^-$ είναι κυρτές ως προς y, επομένως και οι $E[(y-D)^+]$, $E[(y-D)^-]$ είναι κυρτές ως προς y (γενικότερα, αν Z τυχαία μεταβλητή και $f(y,z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z, τότε και $E[f(y,Z)]$ είναι κυρτή ως προς y).
  - Επομένως η $l(y)$ είναι επίσης κυρτή (γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων με μη-αρνητικούς συντελεστές είναι κυρτή συνάρτηση).

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση Περ.1

- Ζητάμε το

$$\min_a c(x,a) = \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x)\}$$

- S: η τιμή της y που ελαχιστοποιεί την $cy + l(y)$ στο $[0,\infty)$ (υπάρχει σίγουρα αφού $\lim_{y\to\infty}(cy + l(y)) = \infty$).
- s: το μικρότερο y ώστε $cs + l(s) = K + cS + l(S)$.
- Περ.1: $x \geq S$:

$$\begin{aligned}\min_a c(x,a) &= \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x)\} \\ &= \min\{K - cx + cx + l(x), l(x)\} = l(x).\end{aligned}$$

- Άρα $a^* = 0$.

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση Περ.2

- Ζητάμε το

$$\min_a c(x,a) = \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x)\}$$

- S: η τιμή της y που ελαχιστοποιεί την $cy + l(y)$ στο $[0,\infty)$ (υπάρχει σίγουρα αφού $\lim_{y\to\infty}(cy + l(y)) = \infty$).
- s: το μικρότερο y ώστε $cs + l(s) = K + cS + l(S)$.
- Περ.2: $s \le x \le S$:

$$\begin{aligned}\min_a c(x,a) &= \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x)\} \\ &= \min\{K - cx + cS + l(S), l(x)\} \\ &= -cx + \min\{K + cS + l(S), cx + l(x)\} \\ &= -cx + \min\{cs + l(s), cx + l(x)\} = l(x).\end{aligned}$$

- Άρα $a^* = 0$.

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση Περ.3

- Ζητάμε το
$$\min_a c(x,a) = \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x)\}$$
- S: η τιμή της y που ελαχιστοποιεί την $cy + l(y)$ στο $[0,\infty)$ (υπάρχει σίγουρα αφού $\lim_{y\to\infty}(cy + l(y)) = \infty$).
- s: το μικρότερο y ώστε $cs + l(s) = K + cS + l(S)$.
- Περ.3: $x < s$:
$$\begin{aligned}\min_a c(x,a) &= \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x)\} \\ &= \min\{K - cx + cS + l(S), l(x)\} \\ &= -cx + \min\{K + cS + l(S), cx + l(x)\} \\ &= -cx + \min\{cs + l(s), cx + l(x)\} \\ &= -cx + cs + l(s).\end{aligned}$$
- Άρα $a^* = S - x$.