Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα Μέρος 2 Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός

Αντώνης Οικονόμου

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

6/10/2022-20/10/2022

Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα

Βασικό πλαίσιο Δυναμικού Προγραμματισμού

- Διακριτός χρόνος.
- Πεπερασμένος χρονικός ορίζοντας.
- Χώρος καταστάσεων αριθμήσιμος (θεωρία)(ή κάποιο διάστημα του $\mathbb{R}$ σε μερικές εφαρμογές).
- Δέσμη αποφάσεων σε κάθε κατάσταση πεπερασμένη(ή κάποιο συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$).
- Ακολουθιακή λήψη αποφάσεων:

$$X_t \to A_t \to X_{t-1} \to A_{t-1} \to \cdots \to X_1 \to A_1 \to X_0.$$

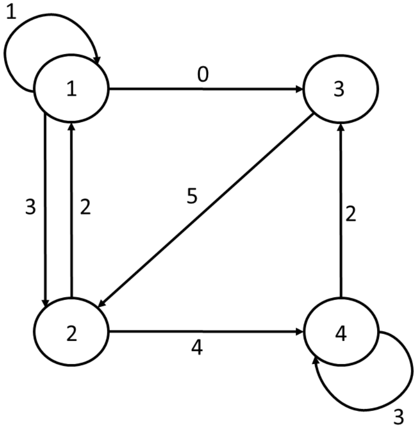
- Απόφαση $\to$ Κόστος.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους.

Βασικές υποθέσεις Δυναμικού Προγραμματισμού

- Το κόστος σε κάθε στάδιο/βήμα εξαρτάται μόνο από τα παρόντα στάδιο, κατάσταση και απόφαση.
- Η επόμενη κατάσταση επιλέγεται μόνο με βάση τα παρόντα στάδιο, κατάσταση και απόφαση.

Παράδειγμα: Κίνηση οχήματος

- Όχημα κινείται πάνω στο οδικό δίκτυο.



Σχήμα: Δίκτυο κίνησης οχήματος.

Παράδειγμα: Κίνηση οχήματος (συνέχεια)

- Κόμβοι = Πόλεις.
- Ακμές = Απευθείας οδικές συνδέσεις.
- Το όχημα σε κάθε περίοδο επιλέγει μια από τις ακμές που έχουν αφετηρία τον κόμβο στον οποίον βρίσκεται και μετακινείται πάνω σε αυτή.
- Αριθμός ακμής = Κόστος μετακίνησης σε επί αυτής.
- Το όχημα την περίοδο 0 βρίσκεται στον κόμβο 1.
- Πρόκειται να κινηθεί για 4 περιόδους.
- Διαδρομή ελάχιστου κόστους ;

Αρχή Bellman

- Αν μια διαδρομή είναι βέλτιστη, τότε κάθε υποδιαδρομή της είναι βέλτιστη για τη σύνδεση των αντίστοιχων αρχικών τελικών κόμβων.
- Π.χ., στην κίνηση οχήματος, αν είναι βέλτιστη η διαδρομή $4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 3$, για μετακίνηση για 4 περιόδους, ξεκινώντας από την 4,
  τότε η διαδρομή $3 \to 2 \to 1 \to 3$ είναι βέλτιστη για μετακίνηση για 3 περιόδους, ξεκινώντας από την 3.

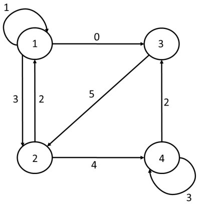
Κίνηση οχήματος (συνέχεια)

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:
  $v_n(x)$: Ελάχιστο συνολικό κόστος μετακίνησης, ξεκινώντας από την κατάσταση x, μετά τη συμπλήρωση n μετακινήσεων.
- Αναδρομικός υπολογισμός:

$$
\begin{aligned}
v_0^*(x_0) &= 0,\ \ x_0 \in \{1,2,3,4\} \\
v_n^*(x_n) &= \min_{a_n} \left(c(x_n, a_n) + v_{n-1}^*(g(x_n, a_n)) \right),\ \ x_n \in \{1,2,3,4\}
\end{aligned}
$$

x_n η κατάσταση στο στάδιο n,
a_n η απόφαση στο στάδιο n,
$g(x_n, a_n)$ η επόμενη κατάσταση αν στο στάδιο n, στην κατάσταση x_n, ληφθεί η απόφαση a_n.

Κίνηση οχήματος (συνέχεια)

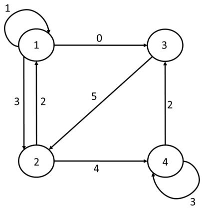


Σχήμα: Δίκτυο κίνησης οχήματος.

- Για $n = 0$: $v_0(x_0) = 0,\ x_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Για $n = 1$: $v_1(x) = \min_a c(x, a)$. Οπότε:

$$
\begin{aligned}
v_1(1) &= 0, \quad a_1^*(1) = 3\\
v_1(2) &= 2, \quad a_1^*(2) = 1\\
v_1(3) &= 5, \quad a_1^*(3) = 2\\
v_1(4) &= 2, \quad a_1^*(4) = 3
\end{aligned}
$$

Κίνηση οχήματος (συνέχεια)



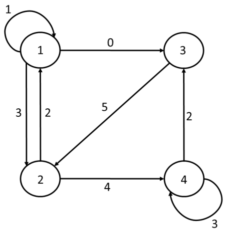
Σχήμα: Δίκτυο κίνησης οχήματος.

- Για $n = 2$: $v_2(x) = \min_a (c(x,a) + v_1(g(x,a)))$. Οπότε:

$$\begin{aligned} v_2(1) &= \min\{c(1,1)+v_1(1), c(1,2)+v_1(2), c(1,3)+v_1(3)\} \\ &= \min\{1+0, 3+2, 0+5\} = 1, \quad a_2^*(1) = 1. \end{aligned}$$

$$v_2(2) = 2, \;\; a_2^*(2) = 1$$
$$v_2(3) = 7, \;\; a_2^*(3) = 2$$
$$v_2(4) = 5, \;\; a_2^*(4) = 4$$

Κίνηση οχήματος (συνέχεια)

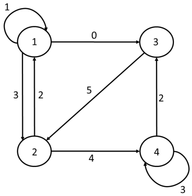


Σχήμα: Δίκτυο κίνησης οχήματος.

- Για $n = 3$:

$$\begin{aligned} v_3(1) &= 2, \quad a_3^*(1) = 1 \\ v_3(2) &= 3, \quad a_3^*(2) = 1 \\ v_3(3) &= 7, \quad a_3^*(3) = 2 \\ v_1(4) &= 8, \quad a_3^*(4) = 4 \end{aligned}$$

Κίνηση οχήματος (συνέχεια)



Σχήμα: Δίκτυο κίνησης οχήματος.

- Για $n = 4$:

$$\begin{aligned} v_4(1) &= 3, \quad a_4^*(1) = 1 \\ v_4(2) &= 4, \quad a_4^*(2) = 1 \\ v_4(3) &= 8, \quad a_4^*(3) = 2 \\ v_4(4) &= 9, \quad a_4^*(4) = 3. \end{aligned}$$

- Ελάχιστο δυνατό κόστος σε 4 βήματα ξεκινώντας από τον κόμβο 1: $v_4(1) = 3$: $1-1-1-1-1$.
- Από κόμβο 4: $v_4(4) = 9$: $4-3-2-1-3$.

Γενικό πλαίσιο Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων πεπερασμένου ορίζοντα

- N: πλήθος σταδίων (συνολικό πλήθος αποφάσεων που θα ληφθούν).
- n: στάδιο (πλήθος αποφάσεων που απομένουν να ληφθούν), $n = N, N-1, N-2, \ldots, 0$.
- x_n: κατάσταση στο στάδιο n.
- a_n: απόφαση στο στάδιο n (μετά την παρατήρηση της x_n).
- $\mathcal{X}$: **αριθμήσιμος** χώρος καταστάσεων συστήματος.
- $\mathcal{A}(x_n; n)$: **πεπερασμένη** δέσμη αποφάσεων στην κατάσταση x_n στο στάδιο n.

Γενικό πλαίσιο Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων πεπερασμένου ορίζοντα (Συνέχεια)

- Δομή κόστους:
  $c(x, a; n)$: Άμεσο κόστος, αν όντας στο στάδιο n, στην κατάσταση x, ληφθεί η απόφαση a.
  $\tilde{c}(x)$: Τερματικό κόστος που επάγεται στο τελικό στάδιο (στάδιο 0), όταν δεν μένουν πια αποφάσεις και η κατάσταση είναι x.
- Δυναμική συστήματος:
  $p_{xy}(a; n)$: Πιθανότητα η επόμενη κατάσταση να είναι η y, αν όντας στο στάδιο n, στην κατάσταση x, ληφθεί η απόφαση a.

Χρονικά ομογενή προβλήματα

- Σε αρκετά προβλήματα τα άμεσα κόστη και οι πιθανότητες μετάβασης δεν εξαρτώνται από το στάδιο στο οποίο βρισκόμαστε, οπότε μιλάμε για χρονικά ομογενές πρόβλημα.
- Στην περίπτωση αυτή τα συμβολίζουμε με $c(x,a)$ και $p_{xy}(a)$ αντίστοιχα.

Κριτήριο Βελτιστοποίησης

- Ζητούμενο: Εύρεση βέλτιστης πολιτικής π.
- Κριτήριο βελτιστότητας: Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους.
- Αντικειμενική συνάρτηση:

$$E_\pi[c(X_N, A_N; N) + c(X_{N-1}, A_{N-1}; N-1) + \cdots + c(X_1, A_1; 1) + \tilde{c}(X_0) | X_N = x].$$

Βασικές υποθέσεις μοντέλου Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων

1. Μαρκοβιανή δυναμική: Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και την τρέχουσα απόφαση.
2. Μαρκοβιανή δομή κόστους: Το άμεσο κόστος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και την τρέχουσα απόφαση.
3. Προσθετική συνάρτηση κόστους: Τα κόστη των διαφόρων περιόδων αθροίζονται.
4. Τέλεια παρατηρησιμότητα: Ο ελεγκτής γνωρίζει ακριβώς την κατάσταση πριν τη λήψη κάθε απόφασης.

Στοιχεία ορισμού Μαρκοβιανής διαδικασίας αποφάσεων

- Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων Πεπερασμένου Ορίζοντα:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}(x) : x \in \mathcal{X}, c, p, \tilde{c}, N, x_0).$$

- $\mathcal{X}$: Χώρος καταστάσεων.
- $\mathcal{A}(x) : x \in \mathcal{X}$: Δέσμες αποφάσεων.
- c: Συνάρτηση άμεσου κόστους.
- p: Συνάρτηση πιθανοτήτων μετάβασης.
- $\tilde{c}$: Συνάρτηση τερματικού κόστους.
- N: Διάρκεια χρονικού ορίζοντα.
- x_0: Αρχική κατάσταση.

Έννοια ιστορίας

- Ιστορία σε ένα πρόβλημα N σταδίων στο στάδιο n:

$$h_N = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$$

ακολουθία καταστάσεων-αποφάσεων μέχρι το στάδιο n.

Έννοια πολιτικής

- Πολιτική:

$$\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \ldots, \pi(1))$$

  σύνολο κανόνων, ένας για κάθε στάδιο, για το ποια απόφαση θα ληφθεί.
- $\pi(n)$: κανόνας λήψης απόφασης για το στάδιο n.
- $\pi_{h_n}(a; n)$: πιθανότητα επιλογής της απόφασης a δεδομένης της ιστορίας h_n στο στάδιο n.
- Πεδίο ορισμού: το σύνολο όλων των δυνατών ιστοριών στο στάδιο n.
- Πεδίο τιμών: το σύνολο των κατανομών πιθανότητας στο σύνολο των δυνατών αποφάσεων.

Κατηγοριοποίηση πολιτικών ως προς την εξάρτηση από την ιστορία

- π ιστοριοεξαρτώμενη (history-dependent - H) στη γενική περίπτωση.
- π Μαρκοβιανή (Markovian - M), αν για κάθε στάδιο n και ιστορία $h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$, είναι

$$\pi_{h_n}(a; n) = \pi_{x_n}(a; n).$$

- π στάσιμη (stationary - S), αν είναι Μαρκοβιανή και για κάθε στάδιο n και κατάσταση x_n, είναι

$$\pi_{x_n}(a; n) = \pi_{x_n}(a).$$

Κατηγοριοποίηση πολιτικών ως προς την επιλογή

- π τυχαιοποιημένη (randomized -R) στη γενική περίπτωση.
- π προσδιοριστική, αν για κάθε στάδιο και ιστορία h_n, υπάρχει μια απόφαση $a_n(h_n)$ που επιλέγεται με βεβαιότητα.
  Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \pi_{h_n}(a_n(h_n); n) &= 1 \\ \pi_{h_n}(a; n) &= 0, \quad a \neq a_n(h_n). \end{aligned}$$

Κλάσεις πολιτικών

- H, M και S: ιστοριοεξαρτώμενες, Μαρκοβιανές και στάσιμες πολιτικές.
- R και D: τυχαιοποιημένες ντετερμινιστικές πολιτικές.
- Κλάσεις πολιτικών: Π^{HR}, Π^{HD}, Π^{MR}, Π^{MD}, Π^{SR}, Π^{SD}.
- Σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&\Pi^{SD} \subseteq \Pi^{SR} \subseteq \Pi^{MR} \subseteq \Pi^{HR},\\
&\Pi^{SD} \subseteq \Pi^{MD} \subseteq \Pi^{MR} \subseteq \Pi^{HR},\\
&\Pi^{SD} \subseteq \Pi^{MD} \subseteq \Pi^{HD} \subseteq \Pi^{HR}.
\end{aligned}$$

Θεωρία Δυναμικού Προγραμματισμού σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα

Υπενθύμιση πλαισίου Ι

- N: πλήθος σταδίων.
- $\mathcal{X}$: χώρος καταστάσεων.
- n: στάδιο.
- x_n: κατάσταση στο στάδιο n.
- a_n: απόφαση στο στάδιο n.
- $\mathcal{A}(x_n; n)$: δέσμη αποφάσεων στην κατάσταση x_n στο στάδιο n.
- $p_{x_n, x_{n-1}}(a_n; n) = \Pr[X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n, A_n = a_n]$: Πιθανότητες μετάβασης.
- $c(x_n, a_n; n)$: Άμεσα κόστη.
- $\tilde{c}(x)$: Τερματικά κόστη.

Υπενθύμιση πλαισίου ΙΙ

- Πολιτική:

$$\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \ldots, \pi(1)).$$

- $\pi_{h_n}(a; n)$: πιθανότητα επιλογής της απόφασης a δεδομένης της ιστορίας h_n στο στάδιο n.
- Πεδίο ορισμού: το σύνολο όλων των δυνατών ιστοριών στο στάδιο n.
- Πεδίο τιμών: το σύνολο των κατανομών πιθανότητας στο σύνολο των δυνατών αποφάσεων.

Συνάρτηση ολικής αξίας πολιτικής

- Δοθείσης μιας πολιτικής $\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \dots, \pi(1))$ και αρχικής κατάστασης x_N:

$$u_N^\pi(x_N) = E_\pi \left[\sum_{n=1}^{N} c(X_n, A_n; n) + \tilde{c}(X_0) \,|X_N = x_N \right].$$

η συνάρτηση της (ολικής) αξίας της.

Συνάρτηση μερικής αξίας πολιτικής

- Δοθείσης μιας πολιτικής
  $\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \ldots, \pi(1))$ και ιστορίας h_n:

$$u_n^{\pi}(h_n) \quad = \quad E_{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n} c(X_k, A_k; k) + \tilde{c}(X_0)\,|H_n = h_n\right].$$

  η συνάρτηση μερικής αξίας της, από το στάδιο n και μετά δεδομένου ότι έχει παρατηρηθεί η ιστορία h_n.

Αναδρομικός υπολογισμός αξίας πολιτικής

- Αναδρομικό σχήμα υπολογισμού αξίας πολιτικής:

$$\begin{aligned} u_0^\pi(h_0) &= \tilde{c}(x_0), \\ u_n^\pi(h_n) &= \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n;n) \cdot \Bigg[c(x_n,a_n;n) \\ &\qquad + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) u_{n-1}^\pi(h_n a_n x_{n-1}) \Bigg], \end{aligned}$$

  όπου $h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$.

- Απόδειξη: Δέσμευση στην απόφαση A_n και στην κατάσταση X_{n-1}.

Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Έστω πρόβλημα N σταδίων.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο στάδιο n, ως προς την τρέχουσα κατάσταση x_n:

$$v_n(x_n) = \inf_{\pi, x_N, a_N, \ldots, x_{n+1}, a_{n+1}} u_n^{\pi}(x_N a_N \ldots x_{n+1} a_{n+1} x_n).$$

- $v_n(x_n)$: μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) για το κόστος από το στάδιο n και μετά, δεδομένου ότι η τρέχουσα κατάσταση είναι x_n.

Βασικό αποτέλεσμα Δυναμικού Προγραμματισμού σε πεπερασμένο ορίζοντα - προς απόδειξη

- Υπάρχει βέλτιστη πολιτική, δηλαδή π τέτοια ώστε:

$$u_n^\pi(\cdots x_n) = v_n(x_n)$$

  που είναι Μαρκοβιανή Ντετερμινιστική MD.

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής υπολογίζεται αναδρομικά

$$\begin{aligned} v_0(x_0) &= \tilde{c}(x_0), \\ v_n(x_n) &= \min_{a_n} \left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

  και η βέλτιστη πολιτική επιλέγει σε κάθε κατάσταση την απόφαση που υλοποιεί το min.

Ανισότητα συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x_n)$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$v_n(x_n) \geq \min_{a_n} \left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1}) \right].$$

Ανισότητα συνάρτησης βέλτιστης τιμής - απόδειξη

π αυθαίρετη πολιτική, στάδιο n και ιστορία

$$h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n,$$

που οδηγεί στην κατάσταση x_n στο στάδιο n.Τότε:

$$\begin{aligned}
u_n^\pi(h_n) &= \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n;n)\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) u_{n-1}^\pi(h_n a_n x_{n-1})\right] \\
&\geq \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n;n)\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) v_{n-1}(x_{n-1})\right] \\
&\geq \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n;n) \underbrace{\min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) v_{n-1}(x_{n-1})\right]}_{\text{Ανεξάρτητο των } a_n, h_n, n} \\
&= \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) v_{n-1}(x_{n-1})\right],
\end{aligned}$$

και παίρνουμε inf για όλα τα π, h_{n+1} και a_{n+1}.

Βασικό θεώρημα Δυναμικού Προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα

- Ορίζουμε τις συναρτήσεις $u_n^*(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} u_0^*(x_0) &= \tilde{c}(x_0),\ x_0 \in \mathcal{X}, \\ u_n^*(x_n) &= \min_{a_n} \left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) u_{n-1}^*(x_{n-1}) \right],\ x_n \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

- $a_n^*(x_n)$: η απόφαση που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος, $n = 1, \dots, N, x_n \in \mathcal{X}$.
- $\pi^* = (\pi^*(N), \pi^*(N-1), \dots, \pi^*(1))$ η MD πολιτική που στην κατάσταση x_n στο στάδιο n επιλέγει την $a_n^*(x_n)$.
- Τότε, για κάθε ιστορία $h_n = x_N a_N \cdots x_{N+1} a_{N+1} x_n$:

$$u_n^{\pi^*}(h_n) = u_n^*(x_n) = v_n(x_n).$$

Βασικό θεώρημα Δυναμικού Προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα (συνέχεια)

- Επομένως, η π^* είναι βέλτιστη.
- Επιπλέον, η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ικανοποιεί τις εξισώσεις βελτιστότητας

$$\begin{aligned} v_0(x_0) &= \tilde{c}(x_0), \; x_0 \in \mathcal{X}, \\ v_n(x_n) &= \min_{a_n} \left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

Βασικό θεώρημα Δυναμικού Προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα - Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε με επαγωγή την

$$u_n^{\pi^*}(h_n) = u_n^*(x_n) = v_n(x_n).$$

- Για $n = 0$ έχουμε ότι

$$u_0^{\pi^*}(h_0) = \tilde{c}(x_0) = u_0^*(x_0) = v_0(x_0), \; x_0 \in \mathcal{X},$$

  οπότε η πρόταση ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n.

Βασικό θεώρημα Δυναμικού Προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα - Απόδειξη (συνέχεια)

- Από την αναδρομική σχέση υπολογισμού αξίας πολιτικής έχουμε:

$$u_n^{\pi^*}(h_n) \quad = \quad \sum_{a_n} \pi^*_{h_n}(a_n;n) \left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) u_{n-1}^{\pi^*}(h_n a_n x_{n-1}) \right].$$

- Όμως από τον ορισμό της π^* έχουμε

$$\pi^*_{h_n}(a_n;n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a_n = a_n^* \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

- Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση:

$$u_{n-1}^{\pi^*}(h_n a_n x_{n-1}) = u_{n-1}^*(x_{n-1}) = v_{n-1}(x_{n-1}).$$

- Άρα ο τύπος για την $u_n^{\pi^*}(h_n)$ γίνεται:

Βασικό θεώρημα Δυναμικού Προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα - Απόδειξη (συνέχεια)

- $$\begin{aligned} u_n^{\pi^*}(h_n) &= \min_{a_n}\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) u_{n-1}^*(x_{n-1})\right] \\ &= \min_{a_n}\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

- Από την πρώτη ισότητα και τον αναδρομικό ορισμό της $u_n^*(x_n)$

$$u_n^*(x_n) = \min_{a_n}\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) u_{n-1}^*(x_{n-1})\right],$$

παίρνουμε $u_n^{\pi^*}(h_n) = u_n^*(x_n)$.

Βασικό θεώρημα Δυναμικού Προγραμματισμού πεπερασμένου ορίζοντα - Απόδειξη (συνέχεια)

$$\begin{aligned} u_n^{\pi^*}(h_n) &= \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)u_{n-1}^*(x_{n-1})\right] \\ &= \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

- Από τη δεύτερη ισότητα και τον ορισμό της $v_n(x_n)$:

$$v_n(x_n) \le \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right],$$

  που μαζί με την ανισότητα βέλτιστης τιμής δίνει

$$v_n(x_n) = \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right].$$

  Συγκρίνοντας δεξιά μέλη: $u_n^{\pi^*}(h_n) = v_n(x_n) = u_n^*(x_n)$.

Γενική μεθοδολογία επίλυσης

- Γράφουμε τις εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x_0) &= \tilde{c}(x_0),\ x_0 \in \mathcal{X}, \\
v_n(x_n) &= \min_{a_n} \left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1}) \right]
\end{aligned}
$$

- Υπολογίζουμε για μικρά $n = 1, 2, \ldots$ και εικάζουμε τη μορφή της $v_n(x_x)$ και την $a_n^*(x_n)$.
- Αποδεικνύουμε επαγωγικά την εικασία.

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Περιγραφή

- Συσσωρευμένο κεφάλαιο → Ετήσιο εισόδημα.
- Αν το ετήσιο εισόδημα είναι x, τότε πρέπει να αποφασιστεί η ποσότητα προς κατανάλωση a, $0 \leq a \leq x$.
- Αν καταναλώθεί a, τότε το επόμενο έτος το εισόδημα θα είναι $x + \theta(x - a)$,
  (ενσωμάτωση αδιάθετου εισοδήματος στο κεφάλαιο με επιτόκιο θ).
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση συνολικού ποσού κατανάλωσης για τα επόμενα N χρόνια, δοθέντος ότι το φετινό ετήσιο εισόδημα είναι x.

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: ο αριθμό N των ετών προγραμματισμού.
- Στάδιο: ο αριθμός n των υπόλοιπων ετών.
- Κατάσταση: Το ετήσιο εισόδημα x στην αρχή ενός έτους.
- Απόφαση: Το ποσό a που θα καταναλωθεί.
- Δυναμική: $x \xrightarrow{a} x + \theta(x - a)$.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$ η μέγιστη ωφέλεια (συνολική κατανάλωση), ξεκινώντας από την κατάσταση x, όταν απομένουν n έτη.

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής υπολογίζεται αναδρομικά από την

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0,\ x \geq 0, \\
v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} \left[a + v_{n-1}(x + \theta(x-a)) \right], \\
&\quad x \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη

$$v_0(x) = 0, \ x \geq 0,$$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 1$, έχουμε

$$v_1(x) = \max_{a \in [0,x]} [a + 0] = x, \ x \geq 0.$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για $n = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \max_{a \in [0,x]} \left[a + x + \theta(x-a)\right] \\ &= (1+\theta)x + \max_{a \in [0,x]} \left[(1-\theta)a\right]. \end{aligned}$$

- $(1-\theta)a$ γραμμική με μέγιστο στο 0 ή στο x:

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \begin{cases} (1+\theta)x + (1-\theta)0 & \text{αν } \theta \geq 1, \\ (1+\theta)x + (1-\theta)x & \text{αν } \theta \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1+\theta)x & \text{αν } \theta \geq 1, \\ 2x & \text{αν } \theta \leq 1, \end{cases} \\ &= \underbrace{\max[1+\theta, 2]}_{\rho_2} x = \rho_2 x, x \geq 0. \end{aligned}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Εικασία για συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Εικάζουμε ότι $v_n(x) = \rho_n x$, $x \geq 0$.
- Απόδειξη με επαγωγή στο n.
- Για $n = 0$ ισχύει προφανώς με $\rho_0 = 0$.
- Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Τότε από την εξίσωση βελτιστοποίησης έχουμε

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \max_{a\in[0,x]} \left[a + \rho_{n-1}(x + \theta(x-a))\right] \\ &= (1+\theta)\rho_{n-1}x + \max_{a\in[0,x]} \left[(1-\theta\rho_{n-1})a\right], \ x \geq 0. \end{aligned}$$

- $(1-\theta\rho_{n-1})a$ γραμμική συνάρτηση του a $\rightarrow$ μέγιστη τιμή στο $[0, x]$ λαμβάνεται στο 0 ή στο x.

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Εικασία για συνάρτηση βέλτιστης τιμής (συνέχεια)

- Επομένως:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= (1+\theta)\rho_{n-1}x + \max_{a\in\{0,x\}}[(1-\theta\rho_{n-1})a] \\ &= \underbrace{\max[(1+\theta)\rho_{n-1}, 1+\rho_{n-1}]}_{\rho_n} x \\ &= \rho_n x,\ \ x \geq 0. \end{aligned}$$

- Η εικασία αποδείχθηκε και, επιπλέον, βρέθηκε ένας αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό των σταθερών ρ_n.

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης δίνεται από τον τύπο

$$v_n(x) = \rho_n x, \ x \geq 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0, \\ \rho_n &= \max[(1+\theta)\rho_{n-1}, 1+\rho_{n-1}], \ n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική

- Έχουμε δει ότι

$$v_n(x) \;=\; (1+\theta)\rho_{n-1}x + \max_{a\in\{0,x\}} \left[(1-\theta\rho_{n-1})a\right], \;\; x \geq 0.$$

- Στο στάδιο n, η βέλτιστη πολιτική είναι $a_n^*(x) = 0$ (αποταμίευση όλου του ποσού), αν

$$1 - \theta\rho_{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow \rho_{n-1} \geq \frac{1}{\theta}.$$

- Άρα:

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \rho_{n-1} \geq \frac{1}{\theta}, \\ x & \text{αν } \rho_{n-1} \leq \frac{1}{\theta}. \end{cases}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική (συνέχεια)

- Από αναδρομικό τύπο $\rho_n = \max[(1+\theta)\rho_{n-1}, 1+\rho_{n-1}]$, έχουμε ρ_n αύξουσα.
- Έστω n^* ο ελάχιστος n για τον οποίο $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$.
- Τότε, έχουμε $\rho_n < \frac{1}{\theta}$ για $n \leq n^* - 1$, ενώ $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$ για $n \geq n^*$.
- Επίσης,

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \geq n^* + 1, \\ x & \text{αν } n \leq n^*. \end{cases}$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική (συνέχεια)

- Υπολογισμός των ρ_n:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= 0,\\
\rho_n &= \rho_{n-1} + \max(1, \theta\rho_{n-1})\\
&= \begin{cases} \rho_{n-1}+1 & n \le n^*,\\ \rho_{n-1}(1+\theta) & n \ge n^*+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Άρα

$$\rho_n = \begin{cases} n & n \le n^*,\\ n^*(1+\theta)^{n-n^*} & n \ge n^*+1. \end{cases}$$

- Άρα ο n^*, ο ελάχιστος n με $\rho_n \ge \frac{1}{\theta}$, είναι ο

$$n^* = \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil.$$

Μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης - Βέλτιστη πολιτική (τελική μορφή)

- Έστω
$$n^* = \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil .$$
- Η βέλτιστη πολιτική κατανάλωσης είναι
$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \geq n^* + 1, \\ x & \text{αν } n \leq n^*, \end{cases}$$
- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι
$$v_n(x) = \rho_n x,\ x \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \dots,$$
όπου
$$\rho_n = \begin{cases} n & \text{αν } n \leq n^*, \\ n^*(1+\theta)^{n-n^*} & \text{αν } n \geq n^*. \end{cases}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Περιγραφή

- Επενδυτής με κεφάλαιο y χρηματικών μονάδων (1 πόρος).
- Κατανομή σε N δραστηριότητες.
- Επένδυση x χρημ. μον. στην επιλογή $n \to$ αναμενόμενη απόδοση $r_n(x)$.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης συνολικής απόδοσης.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: το πλήθος N των δραστηριοτήτων.
- Στάδιο: το πλήθος n των υπόλοιπων δραστηριοτήτων για την επένδυση του εναπομείναντος κεφαλαίου.
- Κατάσταση: το εναπομείναν κεφάλαιο x για επένδυση στις υπόλοιπες δραστηριότητες.
- Αρχική κατάσταση: y.
- Απόφαση: Το ποσό a που θα επενδυθεί στη δραστηριότητα n.
- Δυναμική: $x \xrightarrow{a} x - a$.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$ η μέγιστη συνολική απόδοση, ξεκινώντας από εναπομείναν κεφάλαιο x για επένδυση στις υπόλοιπες n δραστηριότητες.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Μοντελοποίηση

- Πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού (π.μ-γ.π):

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{n=1}^{N} r_n(a_n) \\ \text{υπό} & \\ & \sum_{n=1}^{N} a_n \leq y \\ & a_n \geq 0, \;\; n = 1, 2, \ldots, N. \end{array}$$

- Πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού, εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y, \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r_n(a) + v_{n-1}(x-a)], \\ & \qquad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Συμμετρική περίπτωση, αύξουσα κυρτή απόδοση

- Ειδική περίπτωση:
  $r_n(a) = r(a)$, $n = 1, 2, \ldots$
  $r(a) \geq 0$, αύξουσα κυρτή, $r(0) = 0$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r(a) + v_{n-1}(x-a)], \\ & \qquad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = 0, \; 0 \leq x \leq y,$$

- Για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_1(x) = r(x), \; 0 \leq x \leq y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x, \; 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Για $n = 2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_2(x) = \max_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)], \ 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \ a \in [0, x].$$

- Αν $r(x)$ παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή τότε $\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x-a)$.
- $\frac{df(a)}{da} = 0 \Rightarrow r'(a) = r'(x-a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$.
  $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Οπότε για την

$$f(a) = r(a) + r(x-a),\ a \in [0, x],$$

έχουμε $f(a) \downarrow [0, \frac{x}{2})$ και $\uparrow (\frac{x}{2}, x]$.

- Άρα το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται για $a = 0$ ή $a = x$.
- Επομένως

$$v_2(x) = r(x),\ 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_2^*(x) = 0 \text{ ή } x,\ 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Τα αποτελέσματα για την

$$f(a) \;=\; r(a) + r(x-a),\ a \in [0, x],$$

  ισχύουν και χωρίς τις επιπλέον υποθέσεις για την $r(a)$.
- Αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(a) + r(x-a) \le r(x), \quad a \in [0, x].$$

- Πράγματι:

$$\begin{aligned} r(a) &= r\left(\left(1-\frac{a}{x}\right)0 + \frac{a}{x}x\right) \le \left(1-\frac{a}{x}\right) r(0) + \frac{a}{x} r(x), \\ r(x-a) &= r\left(\frac{a}{x}\,0 + \left(1-\frac{a}{x}\right)x\right) \le \frac{a}{x} r(0) + \left(1-\frac{a}{x}\right) r(x) \end{aligned}$$

  και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$r(a) + r(x-a) \le r(0) + r(x) \le r(x).$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Βέλτιστη πολιτική για αύξουσα κυρτή συμμετρική περίπτωση

- Επαγωγικά, δείχνουμε ότι

$$v_n(x) = r(x), \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

- Η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο n είναι η $a_n^*(x) = 0$ ή η $a_n^*(x) = x$.
- Άρα στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων με αύξουσα κυρτή $r(a)$ και $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση υπαγορεύει να επενδυθεί όλο το κεφάλαιο σε μια επιλογή.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Συμμετρική περίπτωση, αύξουσα κοίλη απόδοση

- Ειδική περίπτωση:
  $r_n(a) = r(a)$, $n = 1, 2, \ldots$
  $r(a) \geq 0$, αύξουσα κοίλη, $r(0) = 0$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r(a) + v_{n-1}(x-a)], \\ & \qquad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = 0, \; 0 \leq x \leq y,$$

- Για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_1(x) = r(x), \; 0 \leq x \leq y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x, \; 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Για $n = 2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_2(x) \quad = \quad \max_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)],\ 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω
$$f(a) = r(a) + r(x-a),\ a \in [0,x].$$

- Αν $r(x)$ παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή τότε $\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x-a)$.
- $\frac{df(a)}{da} = 0 \Rightarrow r'(a) = r'(x-a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$.
$\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Οπότε για την

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \; a \in [0, x],$$

έχουμε $f(a) \uparrow [0, \frac{x}{2})$ και $\downarrow (\frac{x}{2}, x]$.

- Άρα το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται στο $a = \frac{x}{2}$.
- Επομένως

$$v_2(x) = 2r\left(\frac{x}{2}\right), \; 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_2^*(x) = \frac{x}{2}, \; 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Τα αποτελέσματα για την

$$f(a) \;=\; r(a) + r(x-a), \;\; a \in [0, x],$$

ισχύουν και χωρίς τις επιπλέον υποθέσεις για την $r(a)$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(a) + r(x-a) \leq 2r\left(\frac{x}{2}\right), \quad a \in [0, x].$$

- Πράγματι:

$$\frac{1}{2}r(a) + \frac{1}{2}r(x-a) \leq r\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(x-a)\right) = r\left(\frac{x}{2}\right),$$

οπότε

$$r(a) + r(x-a) \leq 2r\left(\frac{x}{2}\right).$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Έχουμε δει ότι

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0,\ 0 \le x \le y, \\
v_1(x) &= r(x),\ 0 \le x \le y, \\
a_1^*(x) &= x,\ 0 \le x \le y, \\
v_2(x) &= 2r\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 \le x \le y, \\
a_2^*(x) &= \frac{x}{2},\ 0 \le x \le y.
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Βέλτιστη πολιτική για αύξουσα κοίλη συμμετρική περίπτωση

- Επαγωγικά, θα δείξουμε ότι

$$v_n(x) = nr\left(\frac{x}{n}\right), \ 0 \le x \le y, \ n = 1, 2, \ldots, N,$$

με αντίστοιχη βέλτιστη απόφαση

$$a_n^*(x) = \frac{x}{n}, \ 0 \le x \le y, \ n = 1, 2, \ldots, N.$$

- Άρα στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων με αύξουσα κοίλη $r(a)$ και $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση υπαγορεύει να επενδυθεί ισόποσα το κεφάλαιο σε όλες τις επιλογές.

Απόδειξη

- Για $n = 1$, $v_1(x) = r(x)$ και $a_1^*(x) = x$, οπότε ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n - 1$. Τότε:

$$v_n(x) = \max_{a \in [0,x]} \left(r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right)\right), \ 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

Απόδειξη (συνέχεια)

- Για την

$$f(a) = r(a) + (n-1)r\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

έχουμε

$$\frac{1}{n}r(a) + \frac{n-1}{n}r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \leq r\left(\frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}\frac{x-a}{n-1}\right) = r\left(\frac{x}{n}\right),$$

οπότε

$$r(a) + (n-1)r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \leq nr\left(\frac{x}{n}\right).$$

Απόδειξη (συνέχεια)

- Αρχίζοντας με κεφάλαιο $y_N = y$ για κατανομή σε N επιλογές, το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y}{N}$ στην επιλογή N.
- Μένει κεφάλαιο $y_{N-1} = \frac{(N-1)y}{N}$ για κατανομή σε $N-1$ επιλογές οπότε το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y_{N-1}}{N-1} = \frac{y}{N}$ στην επιλογή $N-1$ κ.ο.κ.
- Επομένως, όλο το αρχικά διαθέσιμο κεφάλαιο θα πρέπει να επενδυθεί ισόποσα στις επιλογές.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Περιγραφή

- Παίκτης στοιχηματίζει για N γύρους.
- Σε κάθε γύρο μπορεί να στοιχηματίσει οποιοδήποτε κλάσμα της περιουσίας του.
- p: πιθανότητα να κερδίσει.$q = 1 - p$.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης τιμής κάποιας συνάρτησης της τελικής περιουσίας.
- Συνήθως, τέτοιου είδους συναρτήσεις υποτίθενται αύξουσες και κοίλες.
- Εδώ: Μεγιστοποίηση του λογαρίθμου.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: ο αριθμός N των συνολικών γύρων στοιχηματισμού.
- Στάδιο: Ο αριθμός n των υπόλοιπων γύρων στοιχημάτων.
- Κατάσταση: Η παρούσα περιουσία του παίκτη, x.
- Απόφαση: Το κλάσμα της περιουσίας, a, που θα στοιχηματίσει ο παίκτης.
- Δυναμική:

$$x \xrightarrow{a} \begin{cases} x - ax & \text{με πιθ. } q, \\ x + ax & \text{με πιθ. } p. \end{cases}$$

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$, ο μέγιστος αναμενόμενος λογάριθμος της τελικής περιουσίας του παίκτη, όταν αρχίζει με περιουσία x και μένουν n γύροι.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής υπολογίζεται αναδρομικά από τις

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= \log x, \;\; x > 0, \\
v_n(x) &= \max_{a \in [0,1]} \left[p v_{n-1}(x(1+a)) + q v_{n-1}(x(1-a)) \right], \\
&\quad x > 0, \;\; n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 0$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = \log x, \;\; x > 0,$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 1$

- Για $n = 1$, από την αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \max_{a\in[0,1]} [p\log(x(1+a)) + q\log(x(1-a))] \\ &= \max_{a\in[0,1]} [p\log x + p\log(1+a) + q\log x + q\log(1-a)] \\ &= \log x + \max_{a\in[0,1]} [p\log(1+a) + q\log(1-a)] \\ &= \log x + \max_{a\in[0,1]} f(a), \ \ x > 0, \end{aligned}$$

με

$$f(a) = p\log(1+a) + q\log(1-a).$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 1$ (συνέχεια)

- Πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την
$$f(a) = p\log(1+a) + q\log(1-a)$$
για $a \in [0,1)$.
- Έχουμε
$$\frac{df(a)}{da} = \frac{p}{1+a} - \frac{q}{1-a} = \frac{p-q-a}{1-a^2}.$$
- Είναι
$$\frac{df(a)}{a} = \begin{cases} + & a < p-q, \\ 0 & a = p-q, \\ - & a > p-q. \end{cases}$$
- Άρα το max της $f(a)$ πιάνεται στο $p-q$, αν $p \geq q$, και στο 0 διαφορετικά.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Περίπτωση 1: $p < q \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$.
- Για $n = 1$:

$$a_1^*(x) = 0, \quad v_1(x) = \log x + f(0) = \log x, x > 0.$$

- Για $n = 2$, επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής:

$$a_2^*(x) = 0, \quad v_2(x) = \log x, x > 0.$$

- Επαγωγικά: Για $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_n^*(x) = 0, \quad v_n(x) = \log x, x > 0.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής (συνέχεια)

- Περίπτωση 2: $p \geq q \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$.
- Για $n = 1$:

$$a_1^*(x) = p - q, \quad v_1(x) = \log x + \underbrace{f(p-q)}_{c} = \log x + c, x > 0.$$

- Για $n = 2$, επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής:

$$a_2^*(x) = p - q, \quad v_2(x) = \log x + 2c, x > 0.$$

- Επαγωγικά: Για $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_n^*(x) = p - q, \quad v_n(x) = \log x + nc, x > 0.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Βέλτιστη πολιτική

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} c &= f(p-q) = p\log(1+p-q) + q\log(1-p+q) \\ &= p\log(2p) + q\log(2q) \\ &= \log 2 + p\log p + q\log q. \end{aligned}$$

- $p \leq q$ (στοίχημα εις βάρος του παίκτη ή δίκαιο)$\rightarrow$ βέλτιστη πολιτική: να μην στοιχηματίζει σε κανέναν γύρο. $v_n(x) = \log x$.
- $p > q$ (ευνοϊκό στοίχημα)$\rightarrow$ βέλτιστη πολιτική: να στοιχηματίζει κλάσμα $p-q$ της περιουσίας του σε κάθε γύρο. $v_n(x) = \log x + nc$.
- Η βέλτιστη πολιτική είναι στάσιμη προσδιοριστική και μάλιστα η βέλτιστη απόφαση είναι η ίδια ανεξάρτητα κατάστασης.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Περιγραφή

- Μηχανή επιθεωρείται στην αρχή κάθε περιόδου.
- Χρονικός ορίζοντας: Πλήθος περιόδων N.
- Στάδιο: Χρόνος n που απομένει μέχρι τη λήξη της αναγκαιότητας χρήσης.
- Κατάσταση: Ηλικία x.
- Απόφαση: Συντήρηση (Σ) ή Αντικατάσταση (Α).
- Αντικατάσταση $\rightarrow$ την επόμενη μέρα καινούργιο (ηλικία 0) και θα αποφέρει κέρδος (αφαιρώντας το κόστος αντικατάστασης) λ.
- Συντήρηση $\rightarrow$ την επόμενη μέρα ηλικίας $x+1$ ή καινούργιο (ηλικία 0) και θα αποφέρει κέρδος $h(x)$ ή γ, με πιθανότητες $1-q_x$ και q_x .

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Περιγραφή

- Δυναμική:

$$\begin{array}{ccl} x & \stackrel{\mathrm{A}}{\to} & 0 \\ x & \stackrel{\Sigma}{\to} & \begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } q_x, \\ x+1 & \text{με πιθ. } 1-q_x. \end{cases} \end{array}$$

- Άμεση αμοιβή:
  $r(x, \mathrm{A}) = \lambda$,
  $r(x, \Sigma) = q_x\gamma + (1-q_x)h(x)$.
- Τερματικό κέρδος:
  $r(x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Παράμετροι και υποθέσεις

- k:
  Μέγιστη επιτρεπόμενη ηλικία μηχανήματος.
- $\gamma < \lambda < h(x)$:
  Κόστος επείγουσας αντικατάστασης μεγαλύτερο από το κόστος προληπτικής αντικατάστασης, που είναι μεγαλύτερο από το κόστος συντήρησης της μηχανής.
- $q_x \uparrow x$:
  Η πιθανότητα βλάβης αυξάνει με την ηλικία.
- $h(x) \downarrow x$: Το κόστος συντήρησης αυξάνει με την ηλικία.
- $r(x) \downarrow x$:
  Η αξία πώλησης στο τέλος του χρονικού ορίζοντα μειώνεται με την ηλικία.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη μέση συνολική αμοιβή για n περιόδους, $v_n(x)$, ξεκινώντας με μηχάνημα ηλικίας x.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= r(x), \\
v_n(x) &= \max[(1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1))+q_x v_{n-1}(0), \\
&\qquad \lambda + v_{n-1}(0)] \\
&= \lambda + v_{n-1}(0) \\
&+ \max[\underbrace{(1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1)-v_{n-1}(0))-\lambda}_{u_n(x)}, 0] \\
&= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0].
\end{aligned}
$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Εξισώσεις βελτιστοποίησης και εικασία

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= r(x), \\ v_n(x) &= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0], \end{aligned}$$

  με

$$u_n(x) = (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda.$$

- Εικασία:
  Για μεγάλα x, η Α προτιμότερη: $v_n(x) = \lambda + v_{n-1}(0)$.
  Για μικρά x, η Σ προτιμότερη: $v_n(x) > \lambda + v_{n-1}(0)$.
- Ικανή συνθήκη για απόδειξη εικασίας:
  $v_n(x) \downarrow x$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$

- Πρόταση: $v_n(x) \downarrow x$, για κάθε $n \geq 0$.
- Απόδειξη με επαγωγή στο n.
- Για $n = 0$, $v_0(x) = r(x) \downarrow x$.
- Έστω ότι η $v_{n-1}(x) \downarrow x$. Θα δείξουμε ότι και $v_n(x) \downarrow x$.
- Είναι

$$v_n(x) = \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0],$$

οπότε

$$v_n(x-1) - v_n(x) = \max[u_n(x-1), 0] - \max[u_n(x), 0].$$

- Θα διακρίνουμε 4 περιπτώσεις, ανάλογα με τα πρόσημα των $u_n(x-1)$ και $u_n(x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 1

- $u_n(x) \geq 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Έχουμε $(h(x) \downarrow x,\ v_{n-1}(x) \downarrow x)$:

$$
\begin{aligned}
& v_n(x-1) - v_n(x) \\
= \;& u_n(x-1) - u_n(x) \\
= \;& (1-q_{x-1})(h(x-1) + v_{n-1}(x) - v_{n-1}(0)) \\
& -(1-q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
\geq \;& (1-q_{x-1})(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
& -(1-q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
= \;& (q_x - q_{x-1})(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
= \;& \underbrace{(q_x - q_{x-1})}_{\geq 0} \frac{\lambda + u_n(x)}{1-q_x} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 2

- $u_n(x) \geq 0$ και $u_n(x-1) < 0$.
- Η περίπτωση αυτή δεν μπορεί να ισχύει αφού η $u_n(x)$ είναι φθίνουσα:

$$u_n(x) = (1-q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda$$

$(1 - q_x$, $h(x)$ και $v_{n-1}(x)$ είναι $\downarrow x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 3

- $u_n(x) < 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$v_n(x-1) - v_n(x) \;=\; u_n(x-1) \geq 0.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 4

- $u_n(x) < 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$v_n(x-1) - v_n(x) \;=\; 0.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Βέλτιστη πολιτική

- Για κάθε στάδιο n, υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός (κατώφλι) c_n, τέτοιος ώστε η βέλτιστη πολιτική να υπαγορεύει να συντηρείται η μηχανή όταν $x \in \{0, 1, 2, \ldots, c_n\}$ και να αντικαθίσταται αν $x \in \{c_n + 1, c_n + 2, \ldots, k\}$.
- Ο αριθμός αυτός δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} c_n &= \max\{x : u_n(x) \geq 0\}. \\ &= \max\{x : (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x + 1) - v_{n-1}(0)) \geq \lambda\}. \end{aligned}$$

Επιχείρημα ανταλλαγής

- Επιχείρημα της ανταλλαγής $\rightarrow$ Απλοποίηση λύσεων δυναμικού προγραμματισμού όπου υπάρχει ένα συγκεκριμένο σύνολο αποφάσεων που πρέπει να ληφθούν και το ερώτημα είναι η βέλτιστη διάταξή τους.
- Χρονικός ορίζοντας: Αριθμός αποφάσεων N που θα ληφθούν συνολικά.
- Στάδιο: Αριθμός αποφάσεων n που μένει να ληφθούν.
- Κατάσταση: Σύνολο διαθέσιμων αποφάσεων $\mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ με $|\mathcal{S}| = n$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Περιγραφή

- N εργασίες προς διεκπεραίωση.
- $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots x_N$, οι χρόνοι επεξεργασίας των εργασιών.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μοντελοποίηση ως π.μ-γ.π.

- Σειρά διεκπεραίωσης $i_1, i_2, \ldots, i_N$ → Συνολικός χρόνος αναμονής

$$Nx_{i_1} + (N-1)x_{i_2} + \cdots + 2x_{i_{N-1}} + x_{i_N}.$$

- Πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)} \sum_{k=1}^{N} (N-k+1)x_{i_k},$$

όπου η εφικτή περιοχή περιέχει όλες τις δυνατές μεταθέσεις του συνόλου $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μοντελοποίηση ως π.δ.π.

- Χρονικός ορίζοντας: Ο αριθμός όλων των εργασιών, προς διεκπεραίωση, N.
- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathcal{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Απόφαση: Η εργασία, i, που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το ελάχιστο άθροισμα των χρόνων παραμονής των εργασιών, $v_n(\mathcal{S})$, του $\mathcal{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- $v_n(\mathcal{S})$: η ελάχιστη συνολική αναμόνή για τις n εργασίες του $\mathcal{S}$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(\emptyset) &= 0, \\
v_n(\mathcal{S}) &= \min_{i \in \mathcal{S}} [n x_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\})], \\
& \quad \mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}, \ |\mathcal{S}| = n, \ n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Υπολογισμός $v_n(\mathcal{S})$, $n = 0, 1, 2$

- Για $n = 0, 1, 2$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
v_0(\emptyset) &= 0, \\
v_1(\{i\}) &= x_i + v_0(\emptyset) = x_i, \ \{i\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}, \\
v_2(\{i, j\}) &= \min[2x_i + v_1(\{j\}), 2x_j + v_1(\{i\})] \\
&= \min[2x_i + x_j, 2x_j + x_i] \\
&= x_i + x_j + \min[x_i, x_j] = 2x_i + x_j, \\
&\quad \text{αν } x_i \leq x_j, \ \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}.
\end{aligned}
$$

- Χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη των x_i και x_j για να προσδιορίσουμε την $v_2(\{i, j\})$.
- Είναι φανερό ότι αυτό θα χρειάζεται και παρακάτω.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Υπολογισμός $v_n(\mathcal{S})$, $n = 3$

- Για $n = 3$, για τον υπολογισμό της $v_3(\{i, j, k\})$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τη διάταξη των x_i, x_j και x_k
- Υποθέτουμε μια τέτοια διάταξη, έστω $x_i \leq x_j \leq x_k$.
- Τότε, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& v_3(\{i, j, k\}) \\
= \;& \min[3x_i + v_2(\{j, k\}), 3x_j + v_2(\{i, k\}), 3x_k + v_2(\{i, j\})] \\
= \;& \min[3x_i + 2x_j + x_k, 3x_j + 2x_i + x_k, 3x_k + 2x_i + x_j] \\
= \;& 3x_i + 2x_j + x_k, \\
& \text{αν } x_i \leq x_j \leq x_k, \ \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}.
\end{aligned}
$$

- Βέλτιστη σειρά εκτέλεσης των εργασιών $\rightarrow$ Διάταξη τους κατά αύξουσα σειρά των χρόνων εκτέλεσής τους.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$
\begin{aligned}
&v_n(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) \\
&\quad = n x_{i_1} + (n-1) x_{i_2} + (n-2) x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \\
&\quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\
&\quad \text{με } x_{i_1} \le x_{i_2} \le x_{i_3} \le \ldots x_{i_n}.
\end{aligned}
$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$
\begin{aligned}
&a_n^*(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) = i_1, \\
&\quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\
&\quad \text{με } x_{i_1} \le x_{i_2} \le x_{i_3} \le \ldots x_{i_n}.
\end{aligned}
$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n.
- Για $n = 0, 1$ έχει ήδη αποδειχθεί.
- Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Τότε:

$$\begin{aligned}
& v_n(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) \\
= \;& \min[nx_{i_1} + v_{n-1}(\{i_2, i_3, \ldots, i_n\}), \\
& \qquad nx_{i_2} + v_{n-1}(\{i_1, i_3, \ldots, i_n\}), \ldots \\
& \qquad nx_{i_n} + v_{n-1}(\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}] \\
= \;& \min[nx_{i_1} + (n-1)x_{i_2} + (n-2)x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \\
& \qquad nx_{i_2} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \ldots \\
& \qquad nx_{i_n} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \cdots + x_{i_{n-1}}].
\end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συν)

- Ποσότητα που αντιστοιχει στην επιλογή της εργασίας i_k για επόμενη διεκπεραίωση:

$$\begin{aligned} & n x_{i_k} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \cdots + (n-k+1)x_{i_{k-1}} \\ & \quad + (n-k)x_{i_{k+1}} + \cdots + x_{i_n} \\ = \ & n x_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-1}(n-j)x_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{n}(n-j+1)x_{i_j} \\ = \ & \sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + k x_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} x_{i_j}. \end{aligned}$$

- Αρκεί να δείξουμε ότι το ελάχιστο της παράστασης αυτής επιτυγχάνεται για $k = 1$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συν)

- Αν πάρουμε τη διαφορά της παράστασης για ένα τυχόν k και για $k = 1$ έχουμε:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} x_{i_j}}_{\text{για τυχόν } k}$$

$$\underbrace{-\left(\sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + x_{i_1} + \sum_{j=2}^{n} x_{i_j}\right)}_{\text{για } k=1}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(x_{i_k} - x_{i_j}) \geq 0.$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής

- Επιχείρημα ανταλλαγής:
  Εφαρμόσιμο όταν το ζητούμενο δεν είναι το ποιες αποφάσεις να πάρουμε, αλλά υπάρχει ένα σύνολο αποφάσεων που πρέπει να διατάξουμε βέλτιστα.
- Ιδέα:
  Όντας σε μια κατάσταση, συγκρίνουμε για οποιεσδήποτε δυο διαθέσιμες αποφάσεις a και a' τα συνολικά κόστη αν χρησιμοποιήσουμε για τα επόμενα δύο στάδια πρώτα την a και μετά την a' ή πρώτα την a' και μετά την a, και μετά συνεχίσουμε βέλτιστα.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Εφαρμόζω την εξίσωση βελτιστοποίησης για δυο στάδια:

$$\begin{aligned} v_n(\mathcal{S}) &= \min_{i \in \mathcal{S}} [n x_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\})] \\ &= \min_{i \in \mathcal{S}} \min_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} [n x_i + (n-1) x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\})]. \end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Για δοθέντα $i, j \in \mathcal{S}$, το συνολικό κόστος αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι
$$nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$
ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι
$$nx_j + (n-1)x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$
με διαφορά $x_i - x_j$.
- Επομένως, είναι προτιμώτερο να πάρουμε πρώτα την απόφαση i αν $x_i - x_j \leq 0$, δηλαδή αν $x_i \leq x_j$.
- Άρα, σε μια κατάσταση $\mathcal{S}$, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathcal{S}$ είναι καλύτερο να διαλέξουμε την εργασία με τον μικρότερο χρόνο διεκπεραίωσης.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Περιγραφή

- Μηχανή πρόκειται να επεξεργαστεί ακολουθιακά N εργασίες, $1, 2, \ldots, N$.
- Πιθανότητα επιτυχούς περαίωσης εργασίας i: p_i.
- Αμοιβή επιτυχούς διεκπεραίωσης εργασίας i: x_i.
- Βλάβη κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας μιας εργασίας $\rightarrow$ όχι αμοιβή, όχι διεκπεραίωση υπόλοιπων.
- Στόχος: Προγραμματισμός σειράς εκτέλεσης των εργασιών που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική αμοιβή μέχρι την εμφάνιση βλάβης.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Μοντελοποίηση

- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathcal{S}$, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Απόφαση: Η εργασία, i, που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο άθροισμα αμοιβών, $v_n(\mathcal{S})$, από τις εργασίες του $\mathcal{S}$, μέχρι την εμφάνιση βλάβης, δεδομένου ότι αυτή δεν έχει συμβεί ακόμη.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(\emptyset) &= 0, \\ v_n(\mathcal{S}) &= \max_{i \in \mathcal{S}}[p_i(x_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\}))], \ |\mathcal{S}| = n, \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής

- Χρησιμοποιώντας δυο φορές την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$v_n(\mathcal{S}) \quad = \quad \max_{i\in\mathcal{S}} \max_{j\in\mathcal{S}\setminus\{i\}} [p_i(x_i + p_j(x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\})))].$$

- Για δοθέντα $i, j \in \mathcal{S}$, η αναμενόμενη συνολική αμοιβή αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι

$$p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\}),$$

ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι

$$p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\}).$$

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Πρώτα την i και μετά την j είναι προτιμώτερο $\Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\}) \\
&\qquad \geq p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\}) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{p_i x_i}{1-p_i} \geq \frac{p_j x_j}{1-p_j}.
\end{aligned}
$$

- Επομένως, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathcal{S}$ είναι καλύτερο να διεκπεραιώσουμε την εργασία i που έχει το μεγαλύτερο λόγο $\frac{p_i x_i}{1-p_i}$.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Βέλτιστη πολιτική

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$\begin{aligned} & v_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) \\ = \ & p_{i_1} x_{i_1} + p_{i_1} p_{i_2} x_{i_2} + p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} x_{i_3} + \cdots + p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n} x_{i_n}, \\ & \quad \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \\ & \quad \text{με } \frac{p_{i_1} x_{i_1}}{1 - p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2} x_{i_2}}{1 - p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3} x_{i_3}}{1 - p_{i_3}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_n} x_{i_n}}{1 - p_{i_n}}. \end{aligned}$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$\begin{aligned} & a_n^*(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = i_1, \\ & \quad \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \\ & \quad \text{με } \frac{p_{i_1} x_{i_1}}{1 - p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2} x_{i_2}}{1 - p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3} x_{i_3}}{1 - p_{i_3}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_n} x_{i_n}}{1 - p_{i_n}}. \end{aligned}$$

Προβλήματα βέλτιστης διακοπής

- Στα προβλήματα αυτά υπάρχει μια διαδικασία σε εξέλιξη και σε κάθε στάδιο υπάρχουν δύο αποφάσεις:
    1. Συνέχιση της διαδικασίας.
    2. Διακοπή της διαδικασίας.
- Το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής αμοιβής από την εξέλιξη της διαδικασίας.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Περιγραφή

- Είναι γνωστό και ως μοντέλο Cayley-Moser.
- Ένα περιουσιακό στοιχείο προς πώληση.
- N περίοδοι-ευκαιρίες πώλησης.
- Σε κάθε περίοδο έρχεται μία προσφορά.
- Τιμές προσφοράς στις διάφορες περιόδους ανεξ. ισον. με σ.κ. $F(y)$, με αναμενόμενη τιμή μ.
- Σε κάθε περίοδο γίνεται γνωστή η τρέχουσα προσφορά και κατόπιν αποφασίζεται αν θα γίνει πώληση ή όχι.
- Προηγούμενες προσφορές είναι μη-ανακλήσιμες.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης τιμής πώλησης.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: Ο αριθμός των περιόδων/ευκαιριών, N.
- Στάδιο: Ο αριθμός των προσφορών, n, που απομένουν μέχρι το τέλος του χρονικού ορίζοντα.
- Κατάσταση: Η τρέχουσα προσφορά, x.
- Απόφαση : Η αποδοχή ή η απόρριψη της προσφοράς.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση, $v_n(x)$, αν η τρέχουσα προσφορά είναι x και απομένουν n προσφορές (συμπεριλαμβανομένης της τρέχουσας).

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0, \ x \geq 0, \\
v_n(x) &= \max \left[x, \int_0^{\infty} v_{n-1}(y) dF(y) \right], \ x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, αρχική συνθήκη $\Rightarrow$

$$v_0(x) = 0, \; x \geq 0,$$

- Για $n = 1$, εξίσωση βελτιστοποίησης $\Rightarrow$

$$v_1(x) = \max\left[x, 0\right] = x, \; x \geq 0.$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 2$

- Για $n = 2$ έχουμε

$$v_2(x) = \max\left[x, \underbrace{\int_0^\infty y dF(y)}_{E[v_1(Y)]=a_2}\right], \; x \geq 0.$$

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_0^\infty y dF(y) = \mu, \\ v_2(x) &= \begin{cases} a_2, & \text{αν } x \leq a_2, \\ x, & \text{αν } x \geq a_2, \end{cases} \\ a_2^*(x) &= \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_2, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 3$

- Για $n = 3$ έχουμε

$$v_3(x) = \max\left[x, \underbrace{\int_0^{\infty} v_2(y)dF(y)}_{a_3}\right], \; x \geq 0.$$

- Έχουμε:

$$a_3 = E[v_2(Y)] = \int_0^{a_2} a_2 dF(y) + \int_{a_2}^{\infty} y dF(y),$$

$$v_3(x) = \begin{cases} a_3, & \text{αν } x \leq a_3, \\ x, & \text{αν } x \geq a_3, \end{cases}$$

$$a_3^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_3, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_3. \end{cases}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Έστω η ακολουθία

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_n &= \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} y dF(y), \; n = 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$v_n(x) = \max[x, a_n], \; x \geq 0.$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$a_n^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_n, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_n. \end{cases}$$

- Η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Επαγωγή στο n. Για $n = 0, 1$ έχει δειχθεί.
- Αν ισχύει για $n - 1$, τότε

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= \max\left[x, \underbrace{\int_0^\infty v_{n-1}(y)dF(y)}_{a_n}\right], \; x \geq 0. \\
a_n &= E[v_{n-1}(Y)] = \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1}dF(y) + \int_{a_{n-1}}^\infty ydF(y), \\
v_n(x) &= \begin{cases} a_n, & \text{αν } x \leq a_n, \\ x, & \text{αν } x \geq a_n, \end{cases} \\
a_n^*(x) &= \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_n, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συνέχεια)

- Για τη μονοτονία της a_n έχουμε:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} y dF(y) \\ &\geq \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} a_{n-1} dF(y) = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Προβλήμα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Γενικεύσεις

- Πολλά περιουσιακά στοιχεία.
- Παραπάνω από μια ευκαιρία (μερική ανάκληση προσφορών).
- Διαφορετικές κατανομές των προσφορών για διαφορετικές περιόδους.
- Μαρκοβιανή εξάρτηση των προσφορών.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Περιγραφή

- Κάτοχος δικαιώματος αγοράς 1 μετοχής σε τιμή c εντός N περιόδων.
- X_n: τιμή της μετοχής όταν απομένουν n περίοδοι.
- Μοντέλο διακύμανσης τιμής μετοχής $\rightarrow$ Τυχαίος περίπατος:

$$X_n = X_{n+1} + Y_n, \quad Y_n \sim F(y) \text{ ανεξ.}.$$

- Αφού γίνει γνωστή η τρέχουσα τιμή της μετοχής, παίρνεται η απόφαση για το αν το δικαίωμα αγοράς θα ασκηθεί ή όχι.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση αναμενόμενου κέρδους (τιμή μετοχής πλην c).

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: Ο συνολικός αριθμός ημερών, N, για την άσκηση του δικαιώματος.
- Στάδιο: Ο αριθμός των ημερών, n, που απομένουν για να εξασκηθεί το δικαίωμα.
- Κατάσταση: Η τρέχουσα τιμή της μετοχής, x, στην αρχή μιας ημέρας.
- Απόφαση: Η άσκηση ή όχι του δικαιώματος.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος, $v_n(x)$, όταν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι x και το δικαίωμα εκπνέει σε n ημέρες.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \max[x-c, 0], \\ v_n(x) &= \max\left[x-c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y)dF(y)\right], \; n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης

- Εικασία 1: $v_n(x) \uparrow n$ (με επαγωγή).
  Περισσότερες μέρες για την άσκηση του δικαιώματος $\rightarrow$ Μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος.
- Εικασία 2: $v_n(x) \uparrow x$ (με επαγωγή).
  Μεγαλύτερη τρέχουσα τιμή μετοχής $\rightarrow$ Μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης (συνέχεια)

- Εικασία 3: Για κάθε στάδιο n υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός x_n^* τέτοιος ώστε για $x < x_n^*$ να είναι προτιμότερο να μην ασκήσουμε το δικαίωμα, ενώ για $x \geq x_n^*$ να είναι προτιμότερο να ασκήσουμε το δικαίωμα.

  Καθώς είναι βέλτιστο
  να ασκήσουμε το δικαίωμα αν $v_n(x) = x - c$ και
  να μην το ασκήσουμε όταν $v_n(x) > x - c$,
  πρέπει να δείξουμε ότι

$$v_n(x) - x = \begin{cases} > -c & \text{αν } x < x_n^*, \\ = -c & \text{αν } x \geq x_n^*. \end{cases}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης (συνέχεια)

- Εικασία 3′: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $v_n(x) - x \downarrow x$ (με επαγωγή).
  Μεγαλύτερη τιμή $x \rightarrow$ Μικρότερη διαφορά απόδοσης μεταξύ βέλτιστης άσκησης του δικαιώματος και άμεσης άσκησης του δικαιώματος.
- Εικασία 4: $x_n^* \uparrow n$ (με επαγωγή).
  Περισσότερες μέρες για την άσκηση του δικαιώματος $\rightarrow$ Μεγαλύτερη προθυμία για αναμονή στην άσκηση του δικαιώματος.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 1

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) \uparrow n$ για κάθε σταθερό x.
- Για $n = 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} \max(x + y - c, 0) dF(y)\right] \\ &\geq \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} 0 dF(y)\right] = v_0(x). \end{aligned}$$

- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$, δηλ. $v_{n-1}(x) \geq v_{n-2}(x)$, για κάθε x. Τότε:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x + y) dF(y)\right] \\ &\geq \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-2}(x + y) dF(y)\right] = v_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 2

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) \uparrow x$ για κάθε σταθερό n.
- Για $n = 0$ ισχύει: $v_0(x) = \max[x - c, 0] \uparrow x$.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$: $v_{n-1}(x) \uparrow x$.Τότε:

$$
\begin{aligned}
& x \leq x' \Rightarrow \begin{cases} x - c \leq x' - c, \\ v_{n-1}(x+y) \leq v_{n-1}(x'+y), y \in \mathbb{R} \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y)dF(y) \leq \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x'+y)dF(y) \\
\Rightarrow \quad & v_n(x) = \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y)dF(y), 0\right] \\
& \qquad \leq \max\left[x' - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x'+y)dF(y)\right] = v_n(x').
\end{aligned}
$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 3

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) - x \downarrow x$, για κάθε n.
- Για $n = 0$ ισχύει: $v_0(x) - x = \max[-c, -x] \downarrow x$.
- Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Τότε:

$$v_n(x) - x = \max\left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y)dF(y) - x\right]$$
$$= \max\left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} (v_{n-1}(x+y) - (x+y))dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} ydF(y)\right]$$
$$= \max\left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} (v_{n-1}(x+y) - (x+y))dF(y) + E[X]\right].$$

- $v_{n-1}(x+y) - (x+y) \downarrow x$ για κάθε $y \Rightarrow v_n(x) - x \downarrow x$.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Θα δείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική υπαγορεύει την άσκηση του δικαιώματος στο στάδιο n εφόσον η τιμή x στο στάδιο n είναι $\geq$ από κατώφλι x_n^*.
- Έστω n. Αφού η συνάρτηση $v_n(x) - x$ είναι φθίνουσα, υπάρχουν δυο περιπτώσεις:
    1. Αν $v_n(x) - x > -c$ για κάθε x, τότε είναι βέλτιστο πάντα να μην ασκηθεί το δικαίωμα και επομένως $x_n^* = \infty$.
    2. Στην άλλη περίπτωση υπάρχει κάποιο $x < \infty$ ώστε $v_n(x) - x \leq c$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $x_n^* = \inf\{x : v_n(x) - x \leq -c\} < \infty$.
- $v_n(x) - x \downarrow x$, ορισμός $x_n^* \Rightarrow$ $(x \geq x_n^* \Leftrightarrow v_n(x) - x \leq -c)$ και επομένως είναι βέλτιστο να ασκηθεί το δικαίωμα ανν $x \geq x_n^*$.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 4

- Θα δείξουμε ότι $x_n^* \uparrow n$.
- Έχουμε:

$$v_n(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \leq v_{n+1}(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \leq -c.$$

- Η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας της $v_n(x)$ ως προς n.
- Η δεύτερη ισχύει από τον ορισμό του x_{n+1}^*.
- Τότε, λόγω της μονοτονίας της $v_n(x) - x$ ως προς x έχουμε $v_n(x) - x \leq -c$ για κάθε $x \geq x_{n+1}^*$.
- Άρα:

$$x_n^* = \inf\{x : v_n(x) - x \leq -c\} \leq x_{n+1}^*.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Περιγραφή

- Ένας διευθυντής εξετάζει το πολύ N υποψηφίους για την επιλογή ενός για θέση γραμματέως.
- Το N είναι προαποφασισμένο.
- Οι υποψήφιοι μπορούν να διαταχθούν από τον καλύτερο (1ης τάξης) ως τον χειρότερο (Nης τάξης). Δεν υπάρχουν ισοδύναμοι.
- Η σειρά εξέτασης των υποψηφίων είναι τυχαία.
- Μετά τη συνέντευξη ενός υποψηφίου, ο διευθυντής γνωρίζει τη σχετική διάταξή του σε σχέση με όλους τους προηγούμενους.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Περιγραφή (συνέχεια)

- Μετά τη συνέντευξη, ο διευθυντής αποφασίζει αν θα προσλάβει τον υποψήφιο ($a = 1$) ή όχι ($a = 0$).
- Αν προσληφθεί ένας υποψήφιος η διαδικασία συνεντεύξεων σταματά.
- Η απόφαση της πρόσληψης ή της απόρριψης δεν είναι δυνατόν να ανακληθεί αργότερα.
- Στόχος του διευθυντή είναι να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα πρόσληψης στη θέση του καλύτερου υποψηφίου από τους N.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Μοντελοποίηση

- Στάδιο: Ο αριθμός των υπόλοιπων υποψηφίων, n, που ειναι διαθέσιμοι για συνέντευξη, εξαιρουμένου του υποψηφίου που μόλις έχει εξεταστεί (του $(N-n)$-οστού υποψηφίου).
- Κατάσταση: Δίτιμη μεταβλητή x, που να παίρνει τις τιμές 1 (αν ο τελευταίος υποψήφιος ήταν ο καλύτερος μέχρι στιγμής) ή 0 (αν δεν ήταν).
- Απόφαση: Να προσλάβει ή να απορρίψει τον τελευταίο υποψήφιο. Βεβαίως, αν $x=0$, ο υποψήφιος πρέπει να απορριφθεί.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη πιθανότητα, $v_n(x)$, να επιλεγεί ο καλύτερος από όλους τους υποψηφίους, δεδομένου ότι η κατάσταση είναι x και απομένουν n ακόμη υποψήφιοι.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_0(x)$

- Αν ο τελευταίος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τώρα υποψηφίους, τότε ο διευθυντής προσλαμβάνοντάς τον έχει επιλέξει τον καλύτερο υποψήφιο (με πιθανότητα 1).
- Αν όχι, τότε του απομένει να επιλέξει αυτόν τον υποψήφιο που σίγουρα δεν είναι ο καλύτερος:

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x)$, $n \geq 1$, χρήσιμες ποσότητες

- Η πιθανότητα στο στάδιο n η κατάσταση να είναι 1 είναι
$$\frac{1}{N-n},$$
δηλαδή ο τρέχων υποψήφιος να είναι ο καλύτερος από τους $N-n$ που έχουν εξεταστεί.
- Η πιθανότητα στο στάδιο n, ο υποψήφιος να είναι ο καλύτερος όλων των N υποψηφίων δεδομένου ότι είναι ο καλύτερος από τους $N-n$ που έχουν εξεταστεί είναι

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{ο } (N-n)\text{-οστός υποψήφιος είναι ο καλύτερος όλων} \\
&\qquad |\text{είναι ο καλύτερος μεταξύ των πρώτων } N-n] \\
&= \frac{1/N}{1/(N-n)} = \frac{N-n}{N}.
\end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(0)$, $n \geq 1$

- Έστω ότι είμαστε στο στάδιο n.
- Αν $x = 0$, και επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος τότε η πιθανότητα να επιτύχει ο διευθυντής τον στόχο του είναι 0.
- Αν $x = 0$, και δεν επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η επόμενη κατάσταση στο στάδιο $n-1$ είναι η 1, αν ο επόμενος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τότε $N-(n-1)$ υποψηφίους.Άρα:

$$\begin{aligned} v_n(0) &= \max\left[0, \frac{1}{N-n+1}v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1}v_{n-1}(0)\right] \\ &= \frac{1}{N-n+1}v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1}v_{n-1}(0). \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(1)$, $n \geq 1$

- Έστω ότι είμαστε στο στάδιο n.
- Αν $x = 1$, και επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η πιθανότητα να επιτύχει ο διευθυντής τον στόχο του είναι η πιθανότητα ο τρέχων υποψήφιος να είναι ο καλύτερος όλων, δηλαδή $\frac{N-n}{N}$.
- Αν $x = 1$, και δεν επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η επόμενη κατάσταση στο στάδιο $n-1$ είναι η 1, αν ο επόμενος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τότε $N-(n-1)$ υποψηφίους. Άρα:

$$\begin{aligned} v_n(1) &= \max\left[\frac{N-n}{N}, \frac{1}{N-n+1}v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1}v_{n-1}(\right. \\ &= \max\left[\frac{N-n}{N}, v_n(0)\right]. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής - σύνοψη

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases} \\
v_n(0) &= \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0), \\
&\quad n = 1, 2, \ldots, N, \\
v_n(1) &= \max\left[\frac{N-n}{N}, v_n(0)\right], \ n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Ιδιότητες συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Ιδιότητα 1: Η κατάσταση 1 είναι προτιμώτερη της 0 για όλα τα στάδια, δηλαδή,

$$v_n(1) \geq v_n(0),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

- Ιδιότητα 2: Η $v_n(0)$ είναι αύξουσα ως προς n, δηλαδή,

$$v_{n-1}(0) \leq v_n(0),\ \ n = 1, 2, \ldots, N.$$

- Ιδιότητα 3: Ισχύει ότι

$$v_n(0) = (N-n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(N-j-1)(N-j)} v_j(1),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 1 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η σχέση $v_n(1) \geq v_n(0)$ είναι άμεση αφού:

$$v_n(1) = \max\left[\frac{N-n}{N}, v_n(0)\right] \geq v_n(0).$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 2 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η σχέση $v_{n-1}(0) \leq v_n(0)$ συνάγεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης σε συνδυασμό με την ιδιότητα 1:

$$\begin{aligned} v_n(0) &= \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0) \\ &\geq \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(0) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0) \\ &= v_{n-1}(0). \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 3 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Για την ιδιότητα 3 χρησιμοποιούμε αναδρομικά την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_n(0) &= \frac{1}{N-(n-1)} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-(n-1)} v_{n-1}(0) \\
&= \frac{1}{N-(n-1)} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-(n-1)} \cdot \frac{1}{N-(n-2)} v_{n-2}(1) \\
&\quad + \frac{N-n}{N-(n-1)} \cdot \frac{N-(n-1)}{N-(n-2)} v_{n-2}(0) \\
&= \cdots \\
&= \frac{N-n}{(N-n)(N-(n-1))} v_{n-1}(1) \\
&\quad + \frac{N-n}{(N-(n-1))(N-(n-2))} v_{n-2}(1) \\
&\quad + \frac{N-n}{(N-(n-2))(N-(n-3))} v_{n-3}(1) + \cdots + \frac{N-n}{(N-1)N} v_0(1).
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Έστω n^* τέτοιο ώστε

$$n^* = \max\left\{n = 1, 2, \ldots, t-1 : \frac{t-n}{t} \geq v_n(0)\right\}.$$

- Η βέλτιστη πολιτική έχει τη μορφή

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0, \\ 0, & \text{αν } x = 1 \text{ και } n > n^*, \\ 1, & \text{αν } x = 1 \text{ και } n \leq n^*, \end{cases}$$

δηλαδή απορρίπτει τους υποψηφίους μέχρι να απομείνουν n^* υποψήφιοι και κατόπιν επιλέγεται ο πρώτος που είναι καλύτερος μεταξύ αυτών που έχουν ήδη περάσει.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη μορφής βέλτιστης πολιτικής

- Έχουμε
$$v_n(1) = \max\left[\underbrace{\frac{N-n}{N}}_{\downarrow n}, \underbrace{v_n(0)}_{\uparrow n}\right].$$
- $\frac{N-n}{N} \downarrow n$ και $v_n(0) \uparrow n \Rightarrow$
Υπάρχει n^* τέτοιο ώστε $\frac{N-n}{t} \geq v_n(0)$ για $n \leq n^*$,
$\frac{N-n}{t} < v_n(0)$ για $n > n^*$.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Για να βρούμε το n^*, πρέπει να υπολογίζουμε το $v_n(0)$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ και σε κάθε βήμα να συγκρίνουμε το $\frac{N-n}{N}$ με το $v_n(0)$, μέχρι βρούμε ένα n^* ώστε

$$\frac{N-n^*}{N} \geq v_{n^*}(0) \text{ αλλά}$$

$$\frac{N-(n^*+1)}{N} < v_{n^*+1}(0).$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Για τον υπολογισμό του $v_n(0)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$v_n(0) = \frac{N-n}{N} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1}, \; n \leq n^* + 1.$$

- Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 3 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για $n \leq n^* + 1$ και $j = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι $v_j(1) = \frac{N-j}{N}$, οπότε

$$v_n(0) = (N-n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(N-j-1)(N-j)} \underbrace{v_j(1)}_{\frac{N-j}{N}}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Από τον τύπο που μόλις αποδείχθηκε έχουμε

$$
\begin{aligned}
v_{n^*}(0) &= \frac{N-n^*}{N}\sum_{j=0}^{n^*-1}\frac{1}{N-j-1},\\
v_{n^*+1}(0) &= \frac{N-n^*-1}{t}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{1}{N-j-1}.
\end{aligned}
$$

- Το κατώφλι n^* χαρακτηρίζεται από τις ανισότητες $\frac{N-n^*}{N} \geq v_{n^*}(0)$ και $\frac{N-(n^*+1)}{N} < v_{n^*+1}(0)$, που δίνουν

$$
\sum_{j=0}^{n^*-1}\frac{1}{N-j-1} \leq 1 < \sum_{j=0}^{n^*}\frac{1}{N-j-1}.
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Η συνάρτηση $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1}$ είναι αύξουσα ως προς n.
- Το κατώφλι n^* που προσδιορίζει τη βέλτιστη πολιτική είναι το

$$n^* = \max\left\{n = 1, 2, \ldots, N-1 : \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1} \leq 1\right\}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός βέλτιστης πιθανότητας επιλογής

- Η πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου υπό τη βέλτιστη πολιτική είναι $v_{n^*+1}(0)$.
- Πράγματι, στο στάδιο $n^* + 1$ το βέλτιστο είναι να απορριφθεί ο τρέχων υποψήφιος, ανεξάρτητα αν είναι ο καλύτερος ως τότε ή όχι και από κει και πέρα να ακολουθηθεί η βέλτιστη πολιτική.
- Άρα: Η μέγιστη πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου στο πρόβλημα του γραμματέως είναι

$$p_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n^*(N)} \frac{N - n^*(N) - 1}{N - j - 1},$$

όπου $n^*(N)$ το βέλτιστο κατώφλι για την επιλογή του καλύτερου υποψηφίου μεταξύ N υποψηφίων.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός βέλτιστης πιθανότητας επιλογής

- Έχουμε

N	2	3	4	5	6	7	8	9
p_N	0.5	0.5	0.4583	0.4333	0.4277	0.4142	0.4098	0.4059

- Ασυμπτωτικά:
  Το μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που πρέπει να απορρίπτεται πριν επιλεγεί ο μέχρι στιγμής καλύτερος σύμφωνα με τη βέλτιστη πολιτική είναι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N - n^*(N)}{N} = \frac{1}{e}.$$

  Η οριακή πιθανότητα επιλογής του βέλτιστου υποψηφίου υπό τη βέλτιστη πολιτική είναι

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \frac{1}{e}.$$